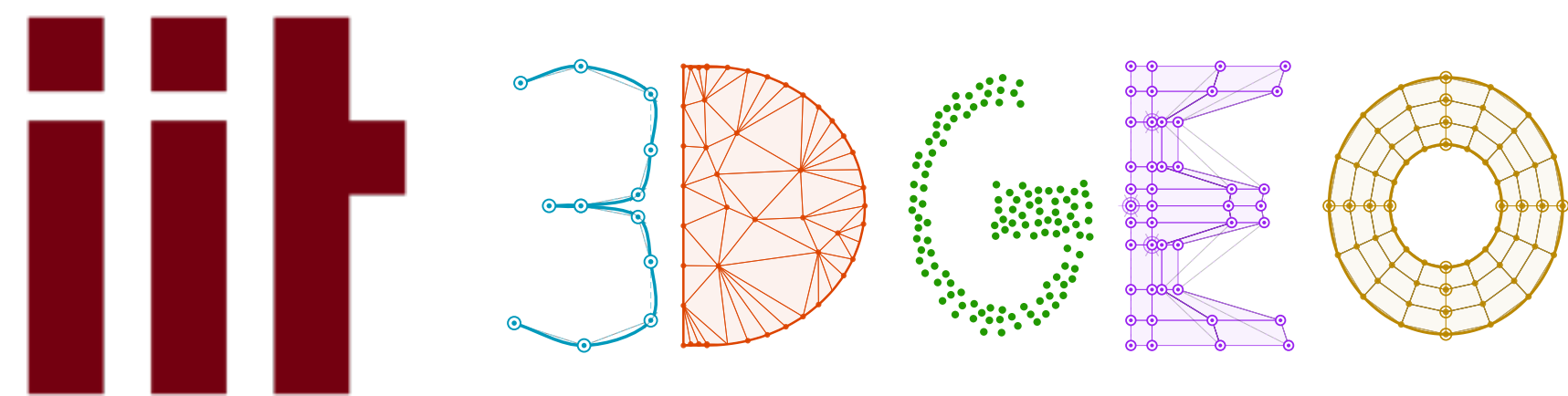
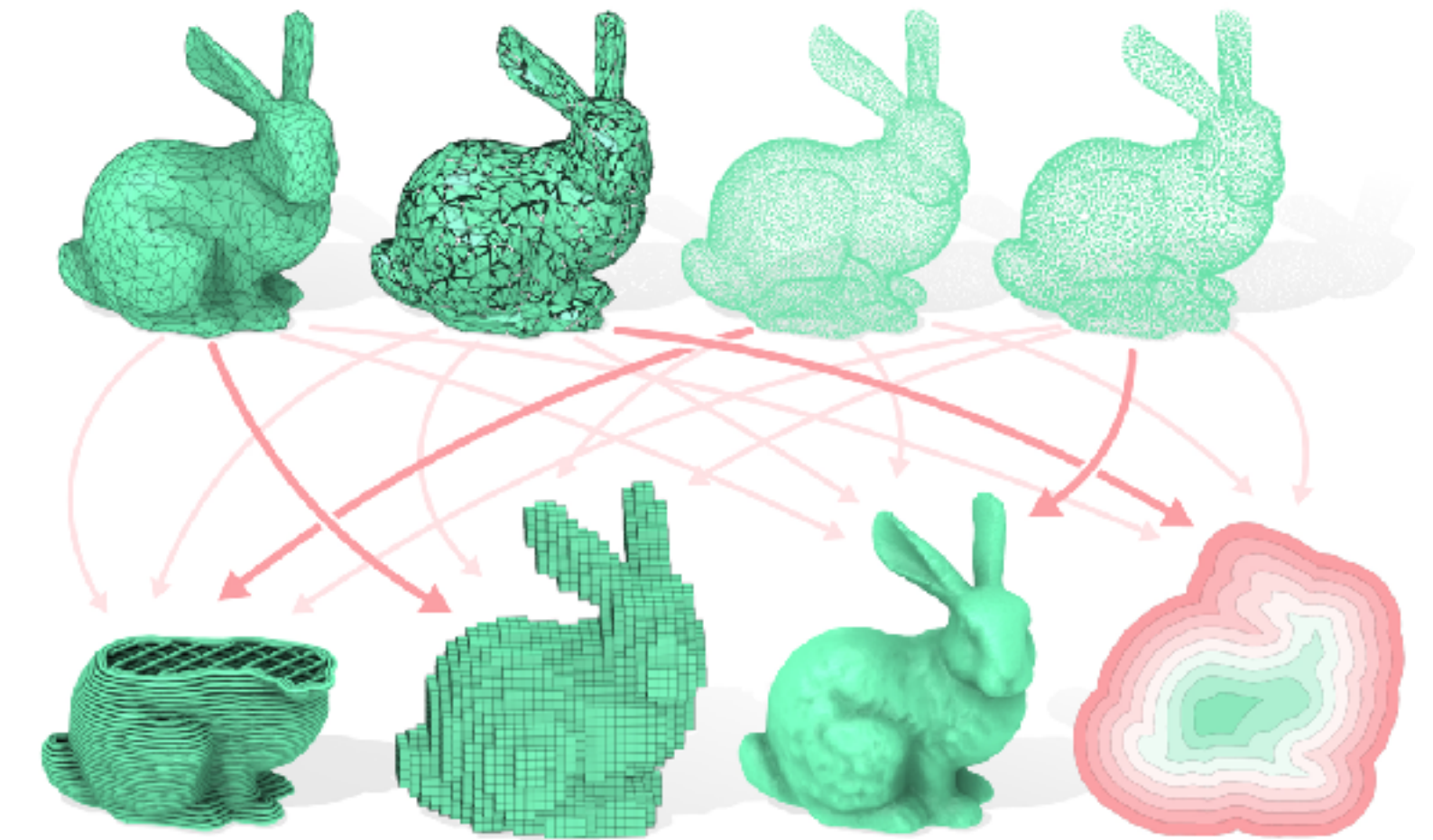


12. Előadás: 3D Geometria Alapok

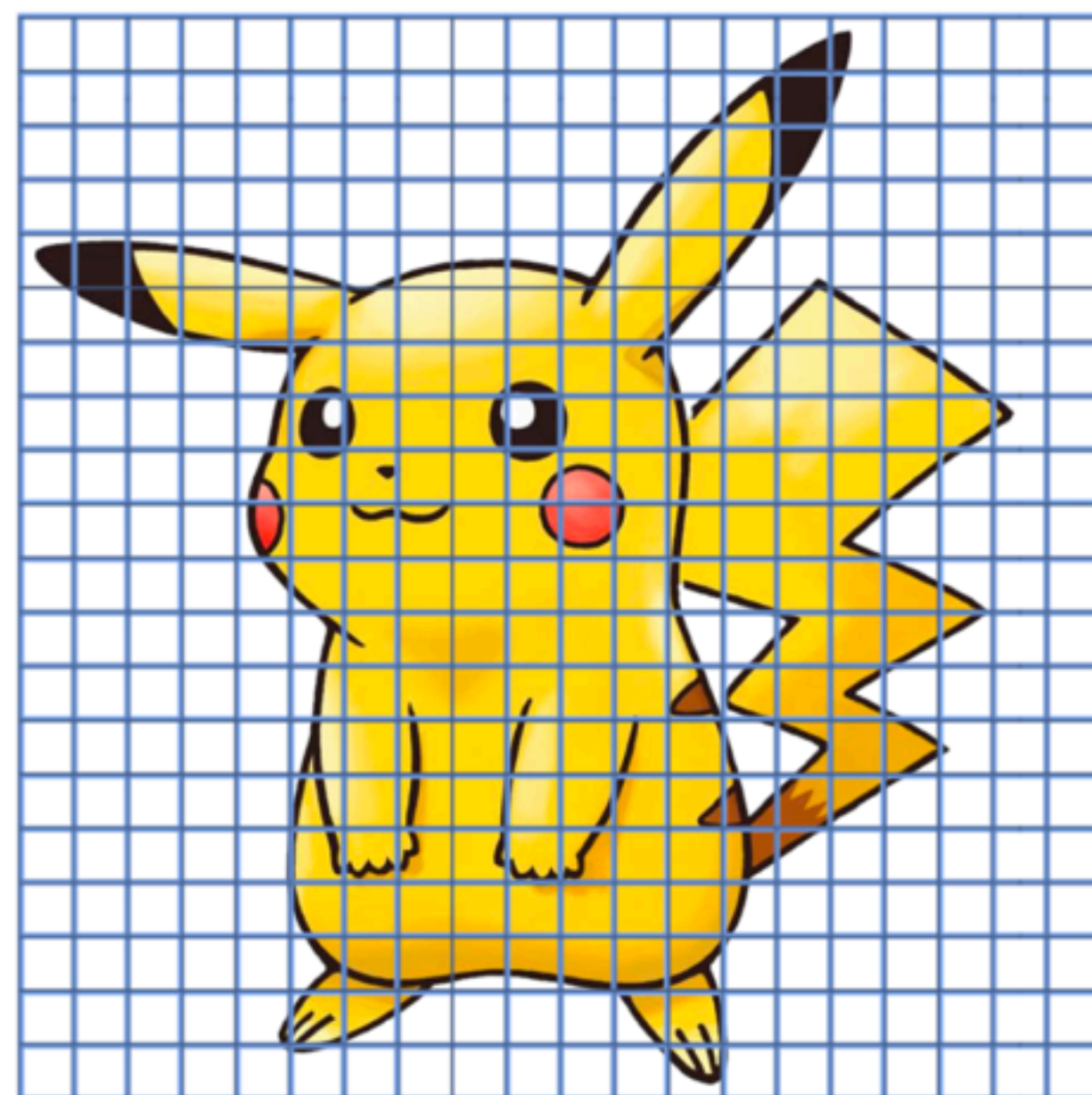
Generatív AI és Inverz Módszerek a Képszintézisben
BME-VIK IIT, 2026



Dr. Vaitkus Márton

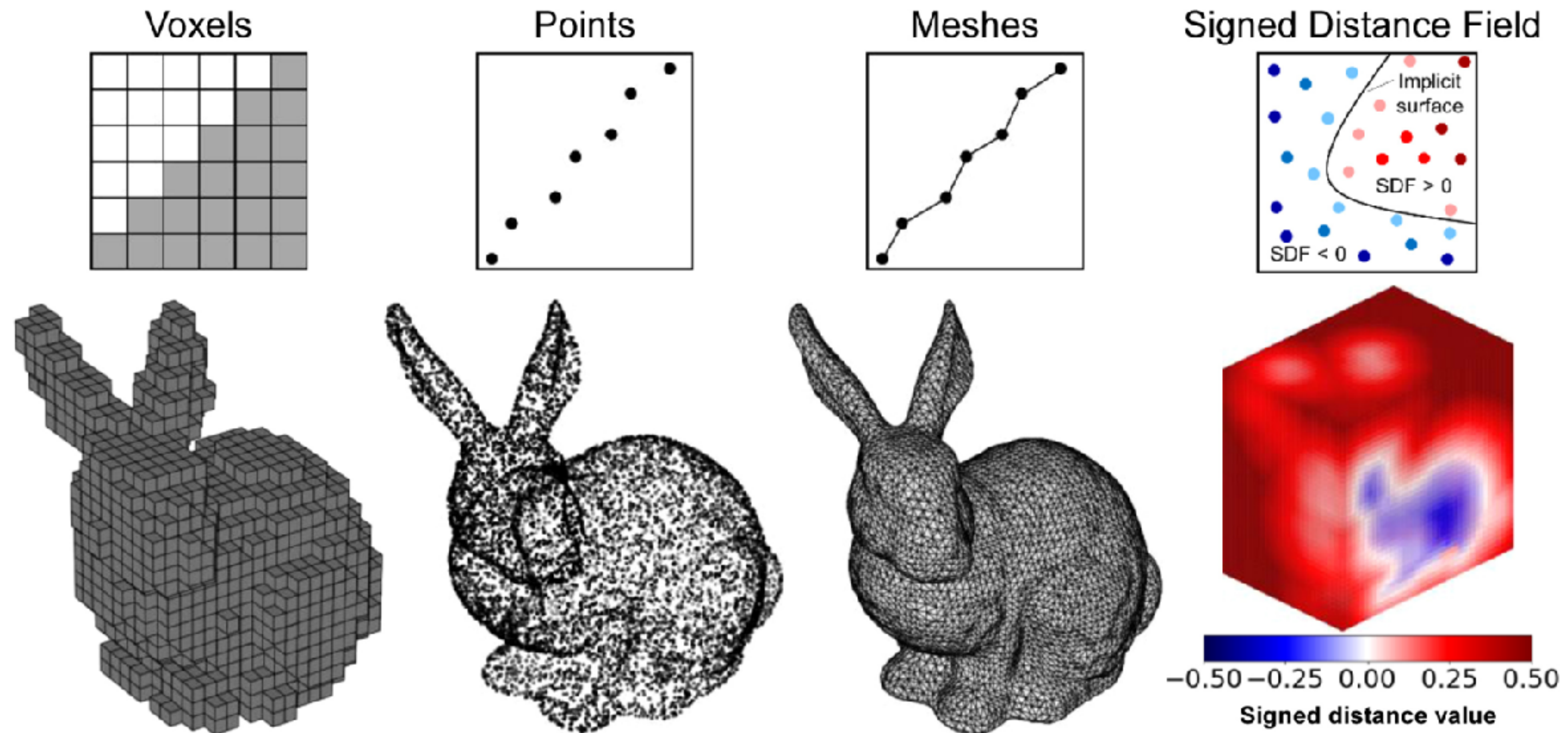
Reprezentációk

2D



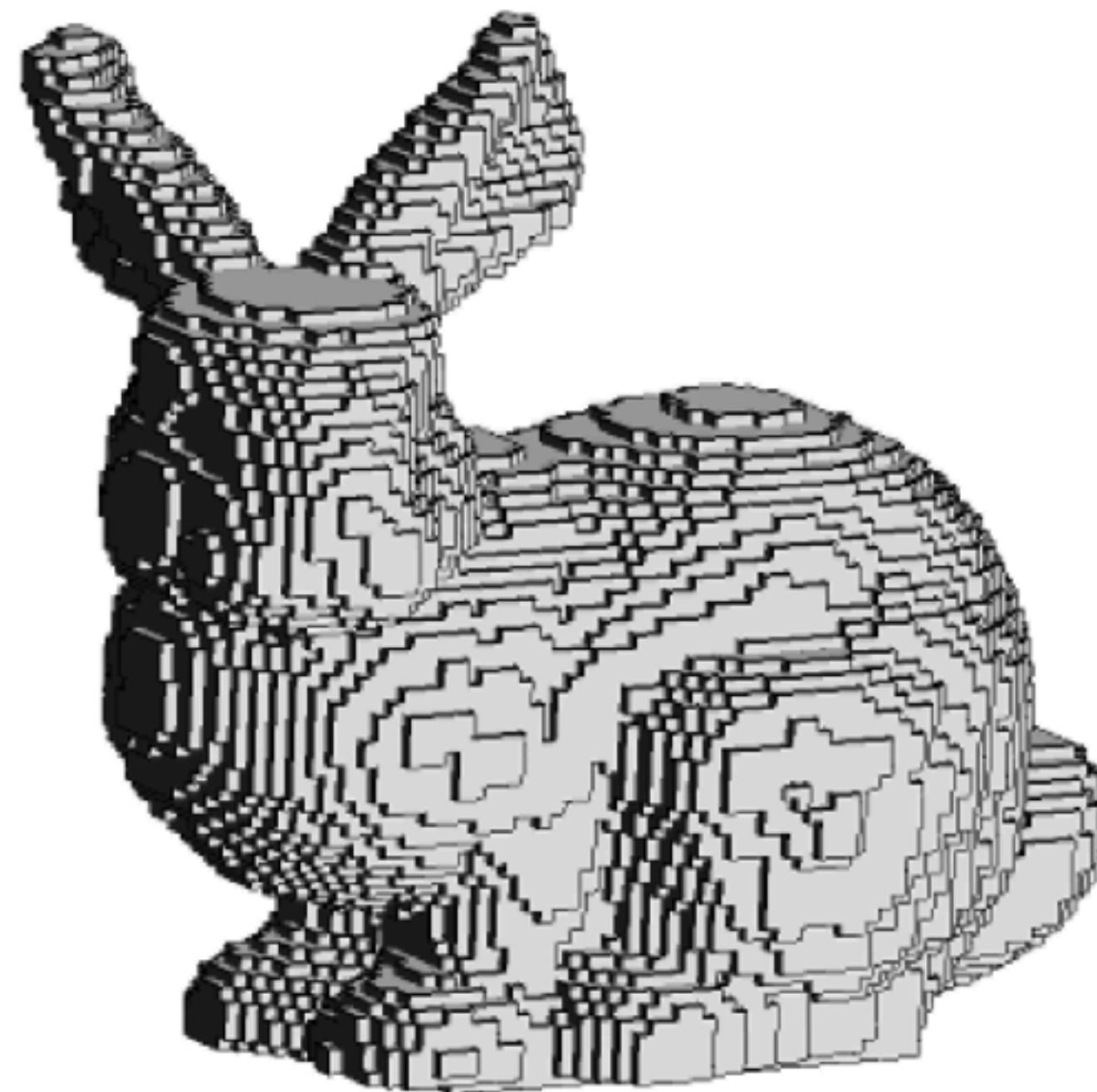
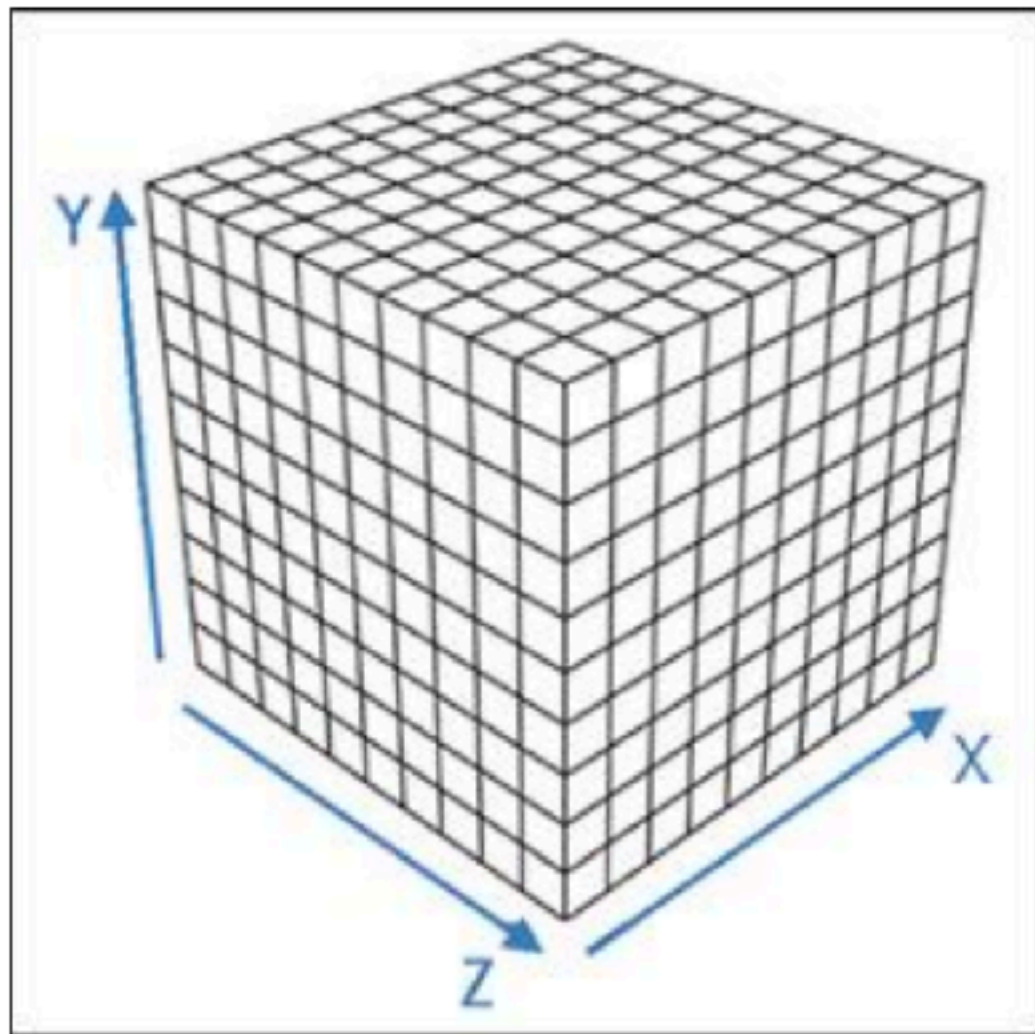
Reprezentációk

3D



3D Reprezentációk

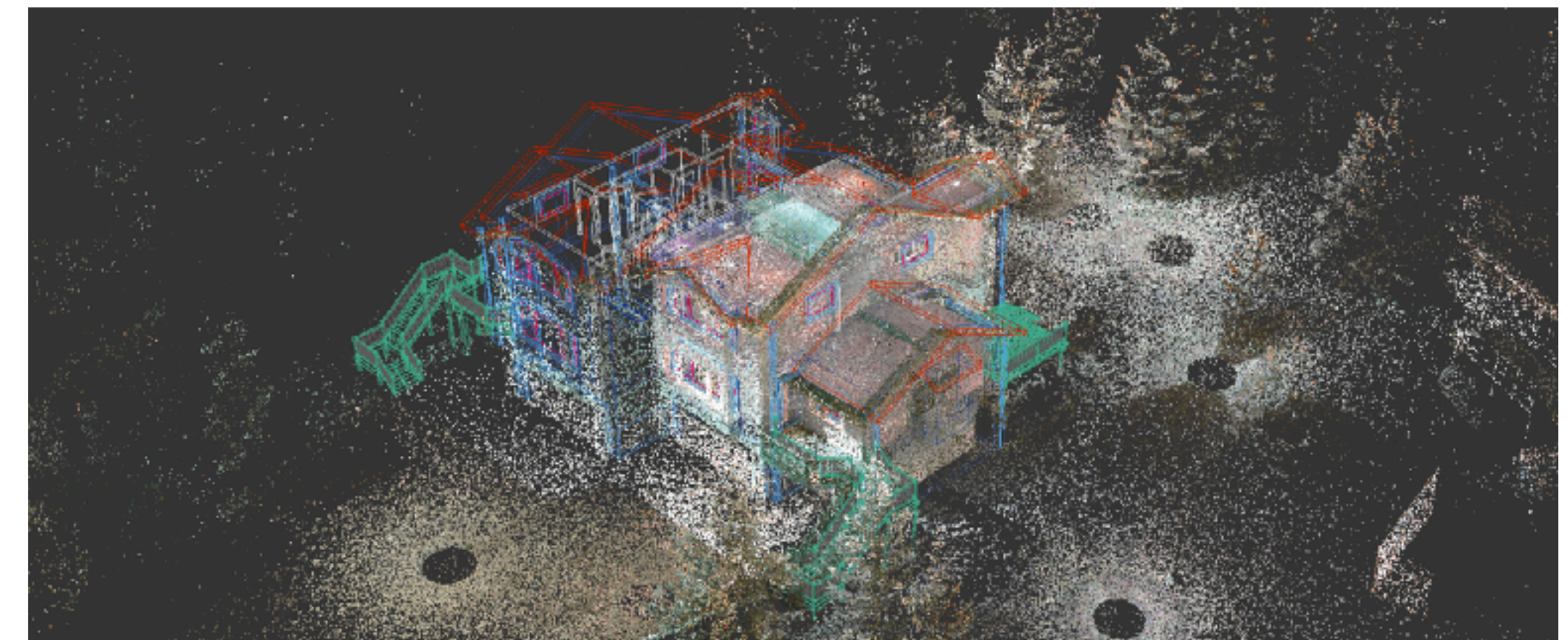
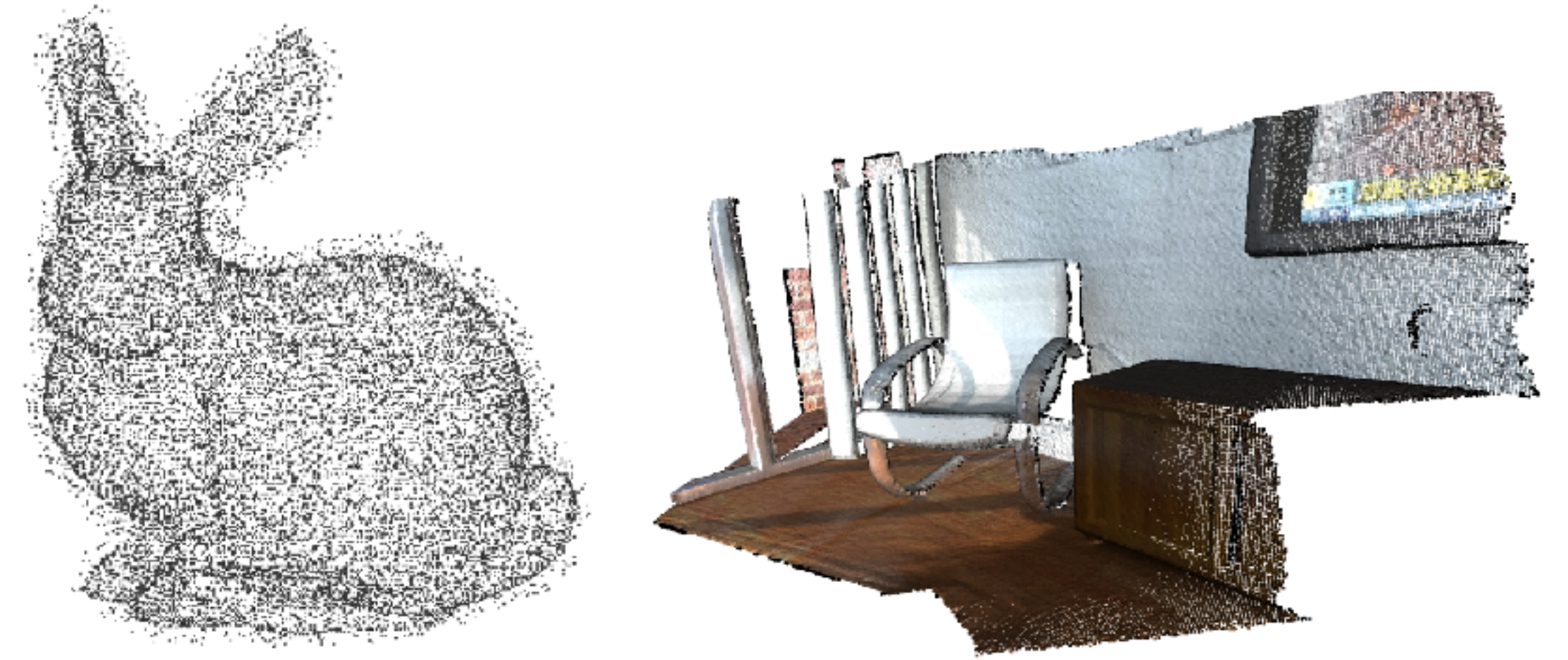
Voxelek



3D Reprezentációk

Pontfelhők

- 3D pontok halmaza: $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$
- Egyéb attribútumok:
 - Normálvektor (egység hosszú):
 $\mathbf{n}_i = (n_{x,i}, n_{y,i}, n_{z,i}), \quad \|\mathbf{n}_i\| = 1,$
 - Szín
 - Szemantikus címkék, stb.
- Rendezetlen halmaz! (előny & hátrány is...)



3D Reprezentációk

Pontfelhők – Tökéletlenségek



Inferred shape



Perfect point set



Noise



Outliers



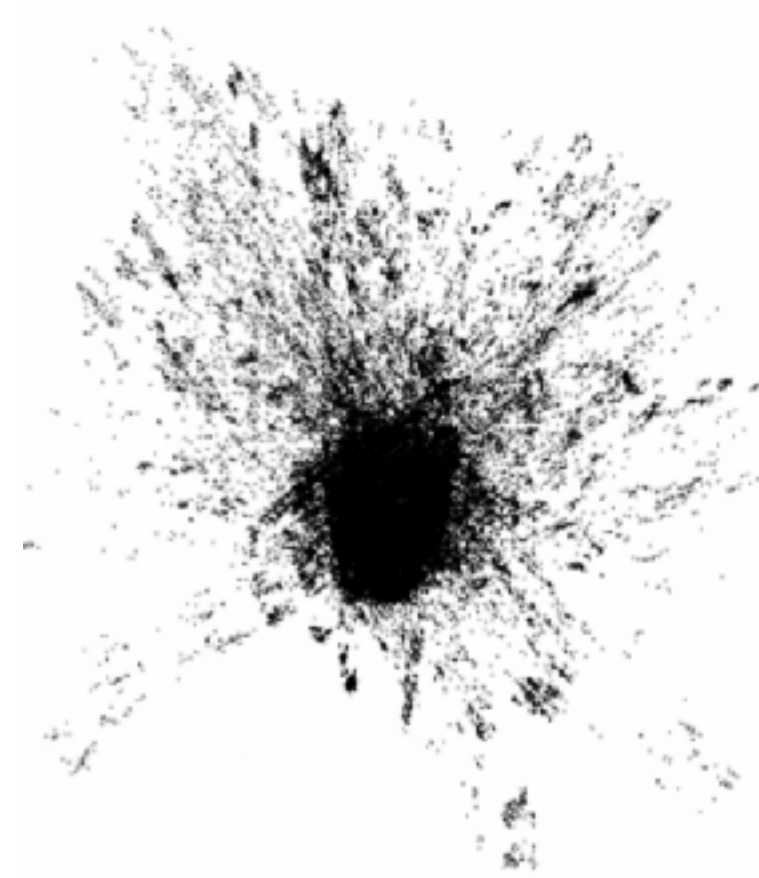
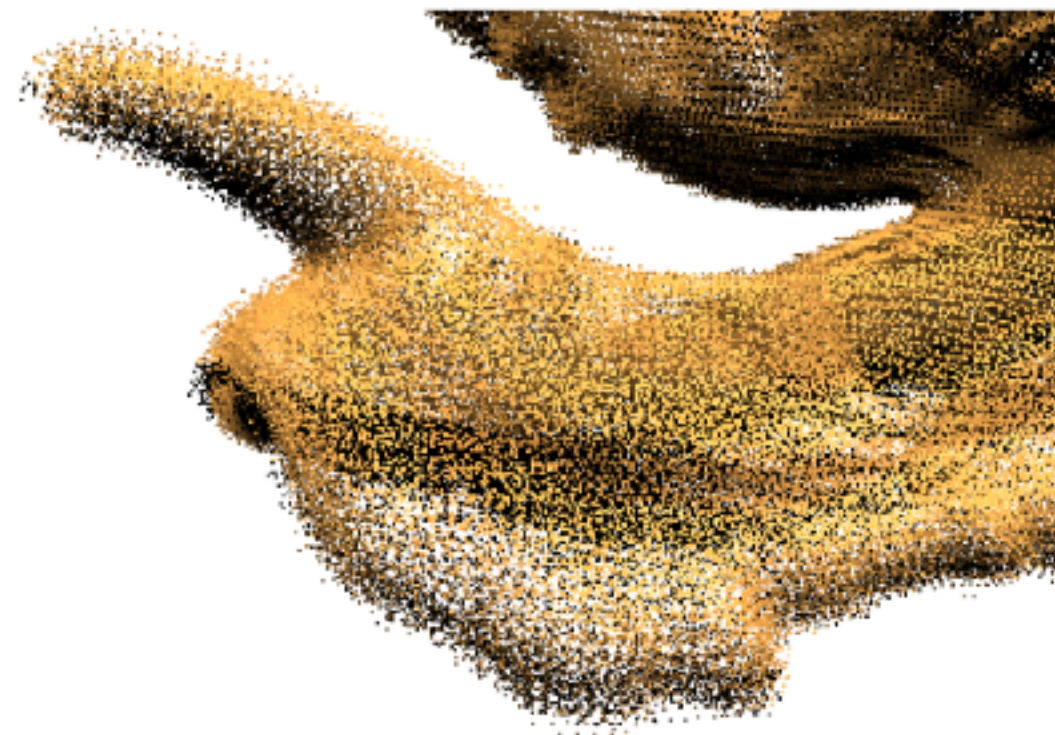
Non-uniform sampling density



Missing data



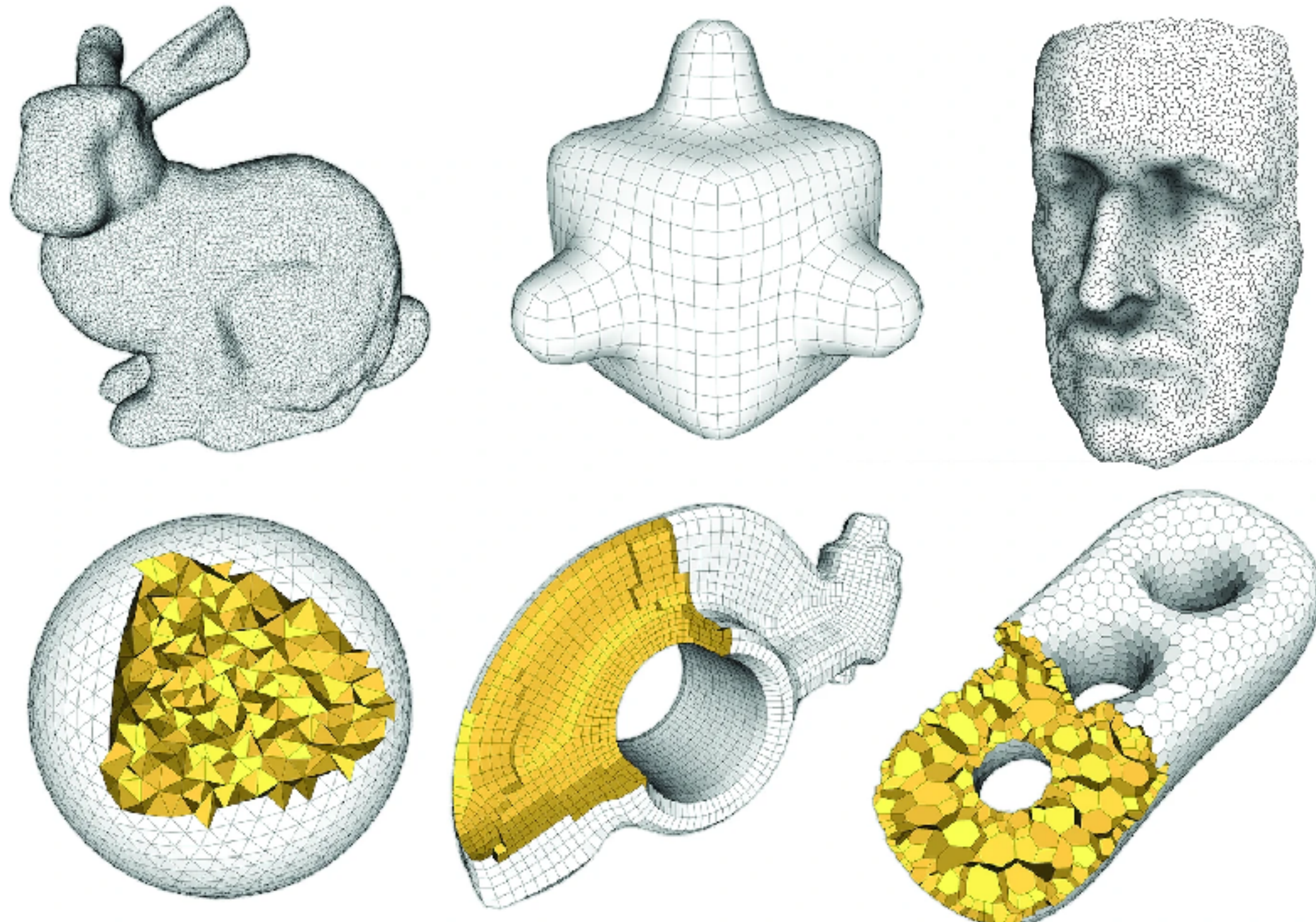
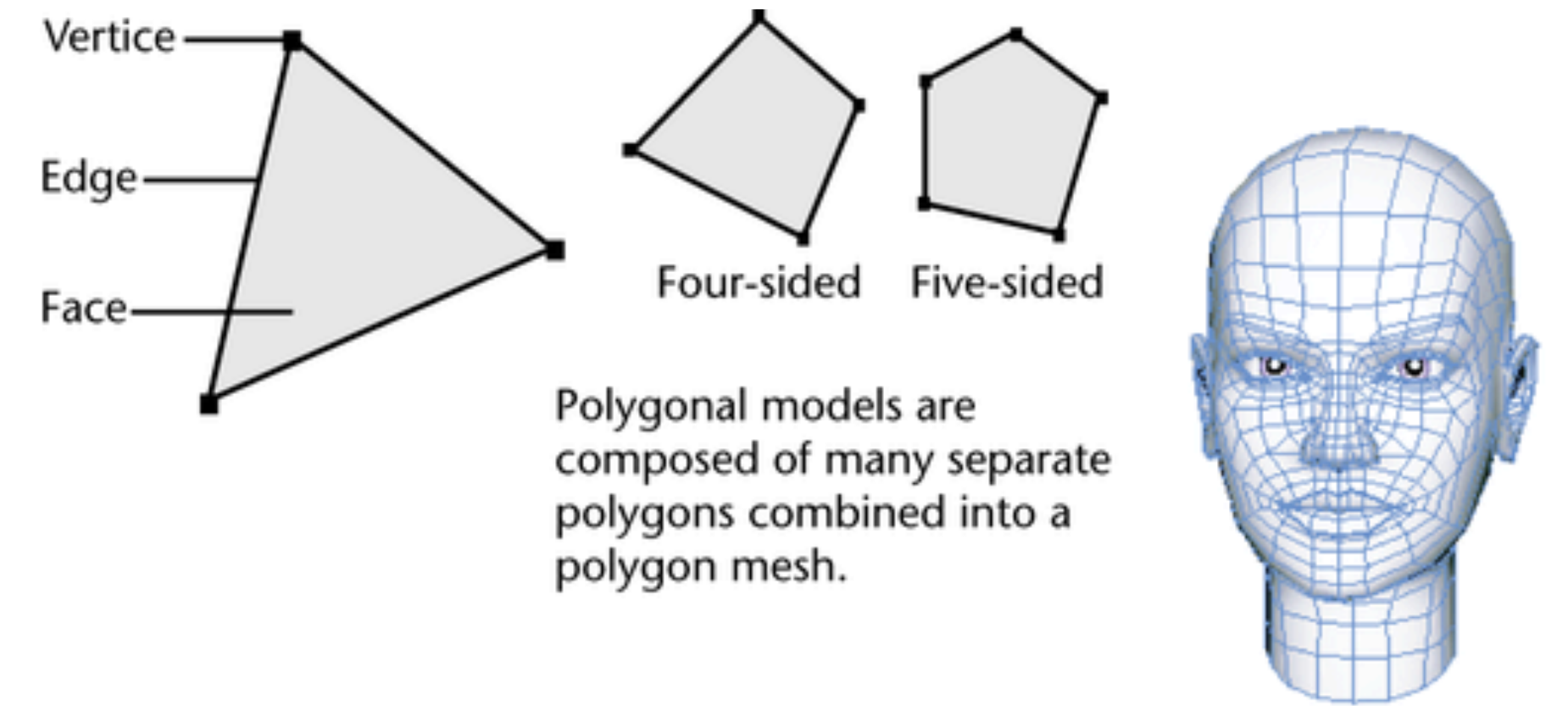
Variable noise



3D Reprezentációk

Poligonhálók

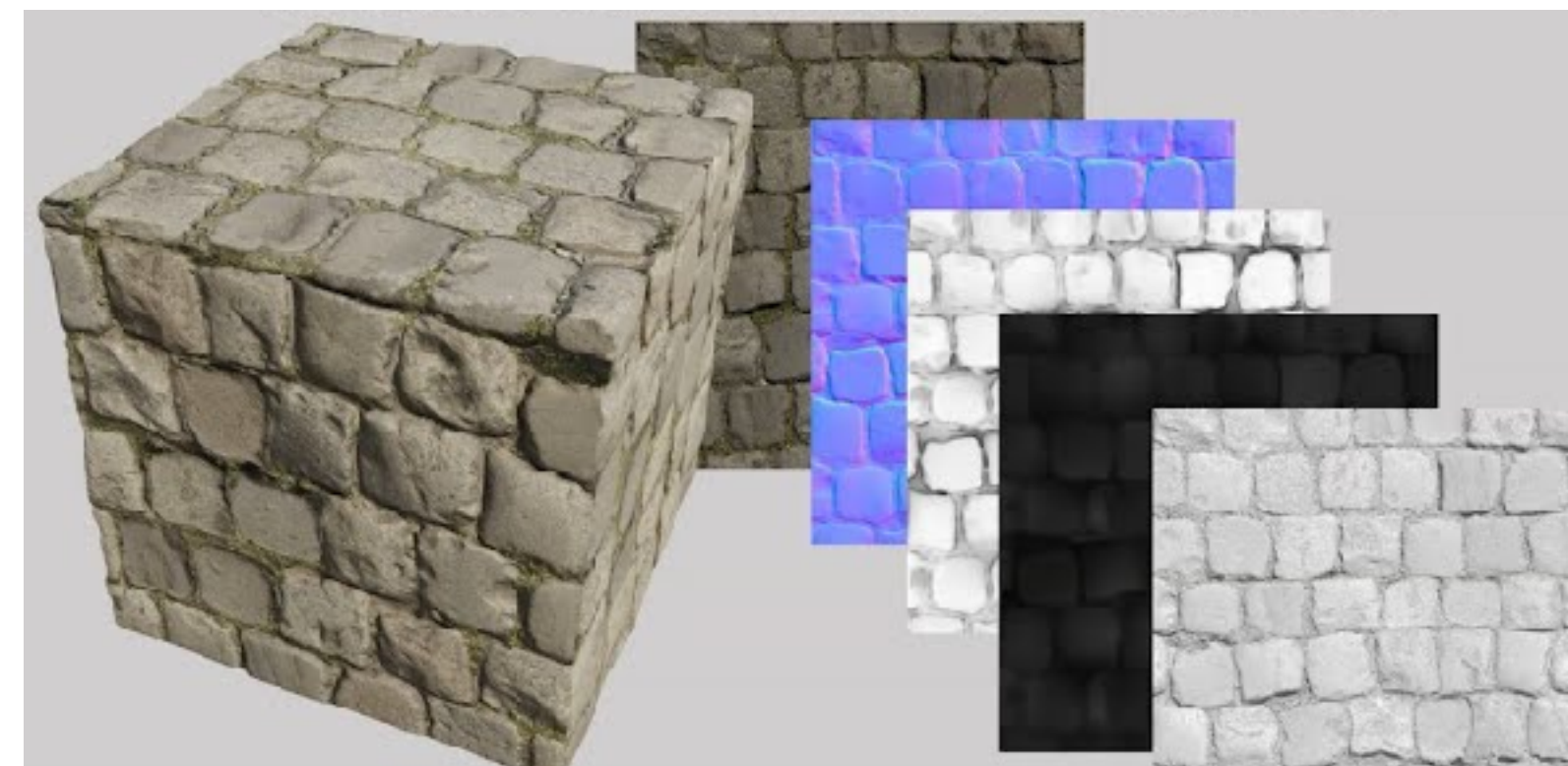
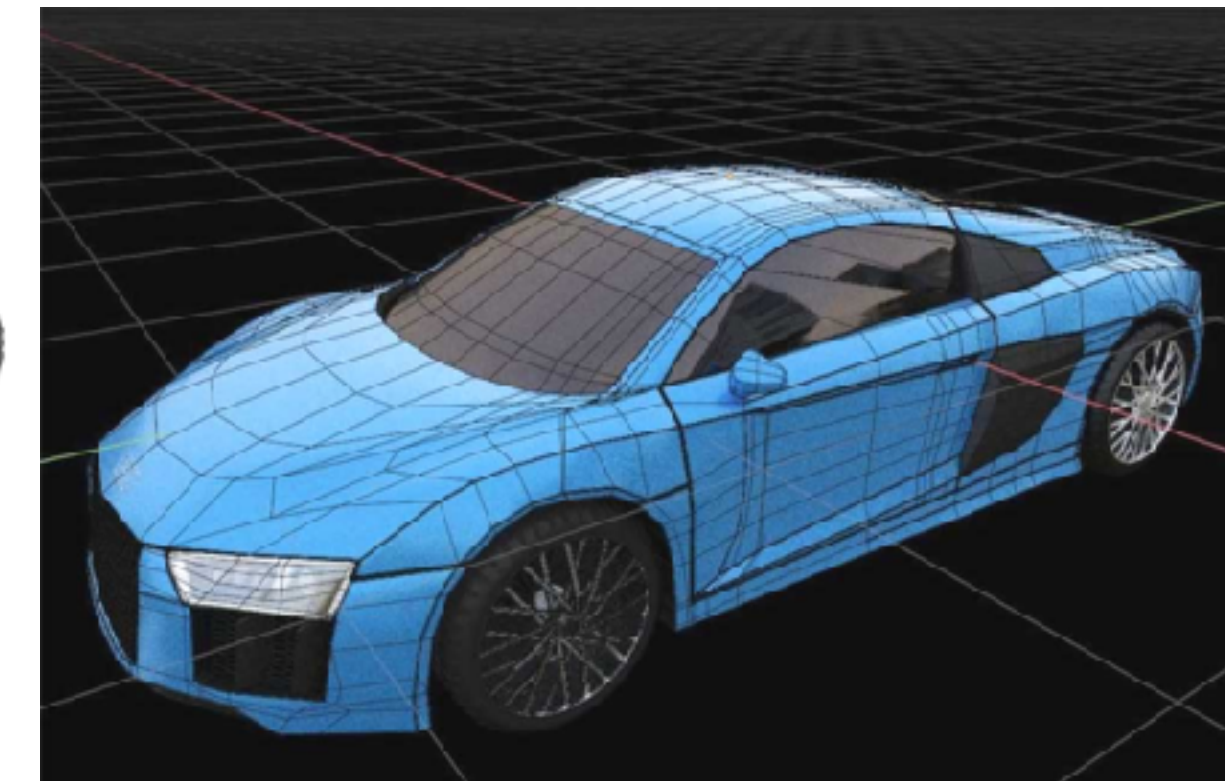
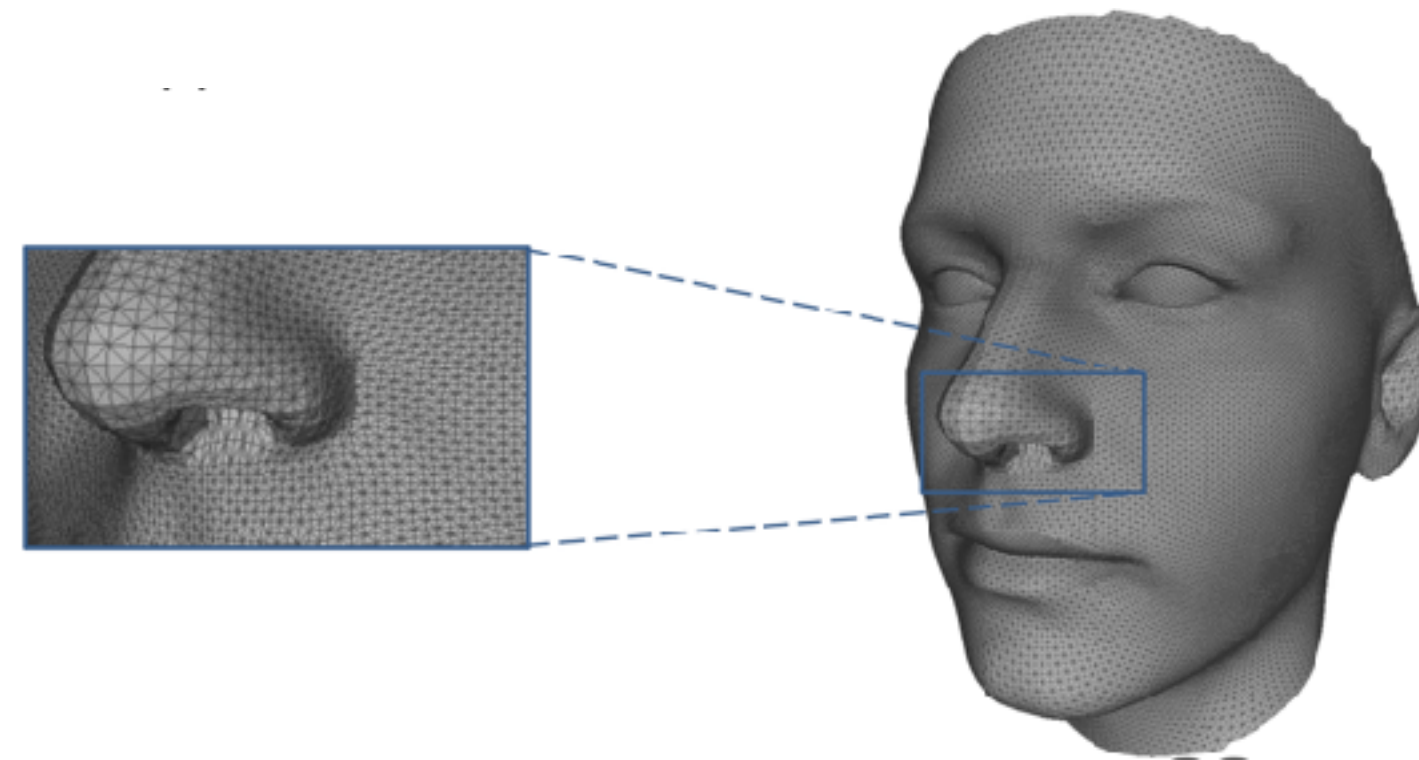
- Felületi hálók: háromszög / sokszög (poligon)
- Térfogati hálók: tetraéder / poliéder



3D Reprezentációk

Háromszöghálók

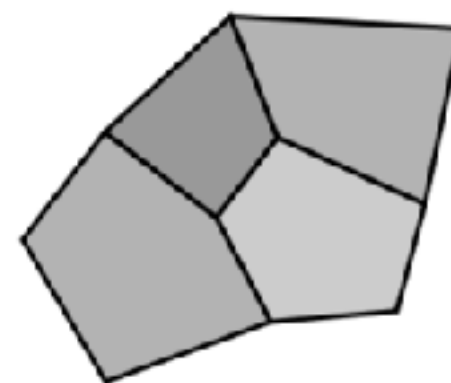
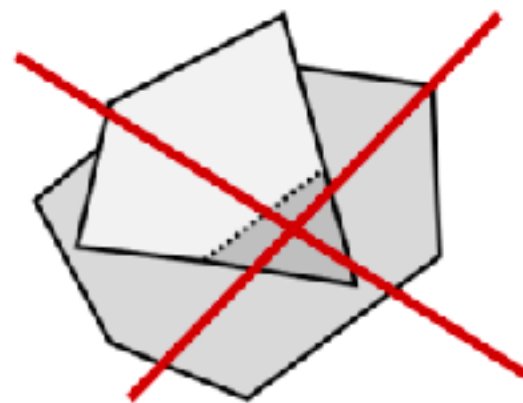
- De facto standard reprezentáció a 3D grafikában (GPU hardware támogatás)
- A gyakorlatban: modellezés “durva” poligonhálóként (kontrollháló), majd rekurzív felosztás (subdivision)
- Egyéb attribútumok — általában textúráként tárolva:
 - Normálvektor
 - Szín
 - Displacement map
 - Etc.



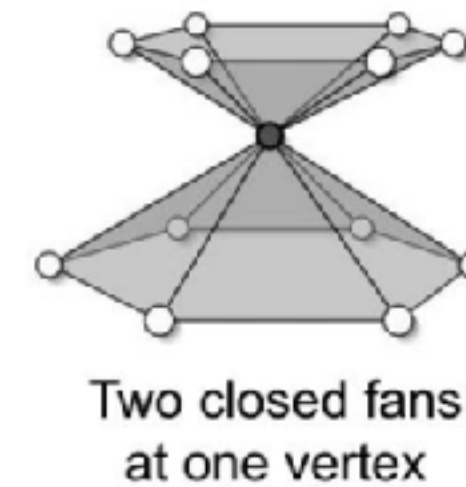
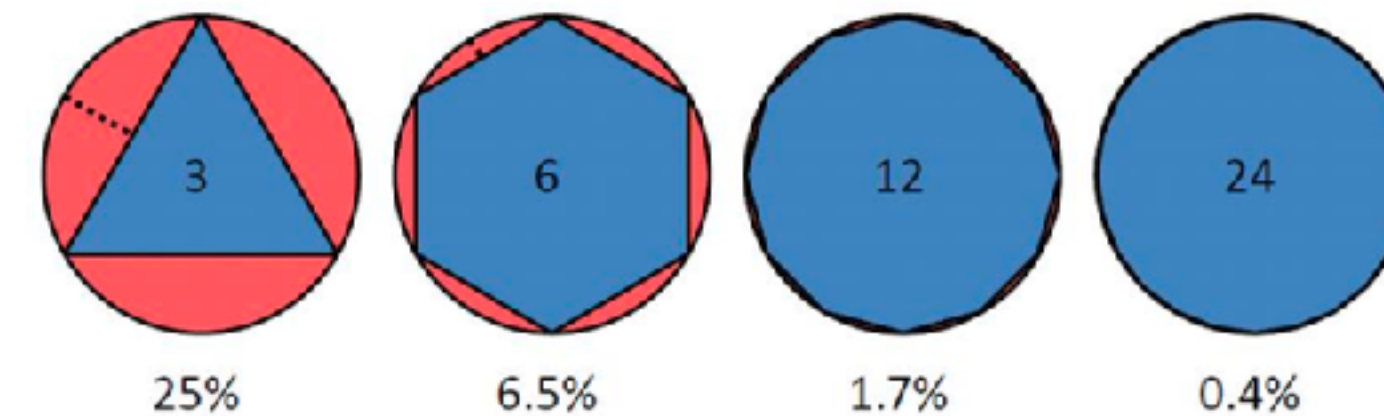
3D Reprezentációk

Háromszöghálók

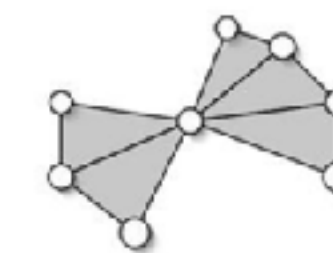
- Elméletben bármilyen 3D geometria közelíthető háremszögekkel
 - Approximációs hiba $O(h^2)$ szerint csökken a h felbontási paraméter függvényében
- Figyelem: poligonok tetszőleges konfigurációja nem ad valid hálót!



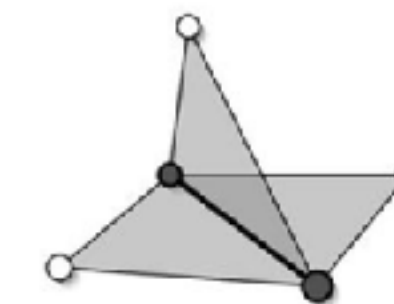
- Gyakori feltevés: **manifold** tulajdonság



Two closed fans at one vertex



Two open fans at one vertex



Three triangles At one edge



Intersection of triangles Is an entire triangle

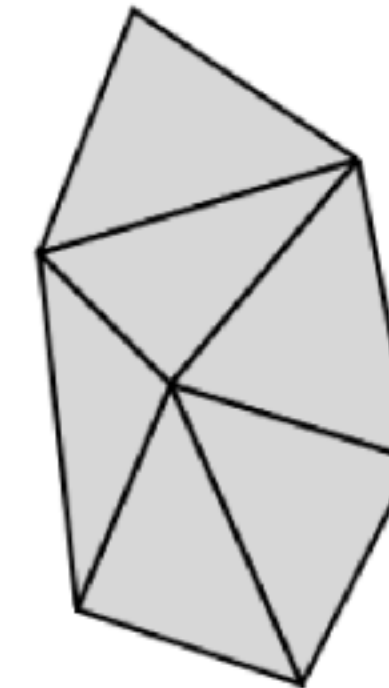
Examples of non-manifold meshes

3D Reprezentációk

Háromszöghálók – Topológia vs. Geometria

– Topologically equivalent:

- But different geometry



– Geometrically equivalent:

- But different topology



3D Reprezentációk

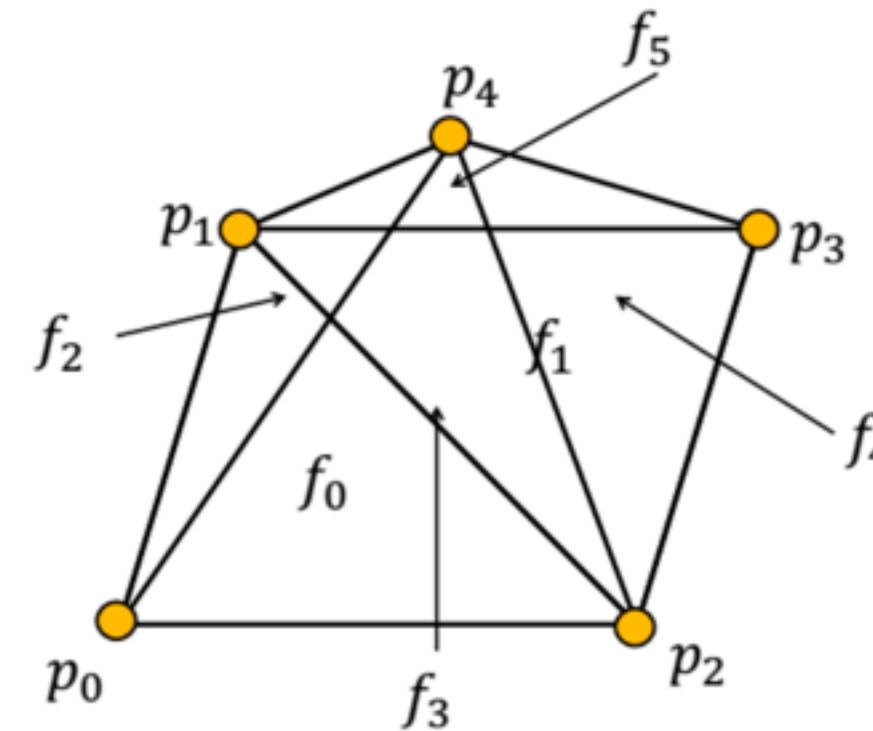
Háromszöghálók – Adatszerkezetek

Shared Vertex Data Structure

– De facto standard for file formats (e.g., OFF, OBJ, STL, PLY, ...)

```
vertex list  
p0: x0, y0, z0;  
p1: x1, y1, z1;  
p2: x2, y2, z2;  
p3: x3, y3, z3;  
p4: x4, y4, z4;
```

```
face list  
f0: 0, 1, 2;  
f1: 2, 1, 3;  
f2: 1, 0, 4;  
f3: 4, 0, 2;  
f4: 4, 2, 3;  
f5: 4, 3, 1;
```



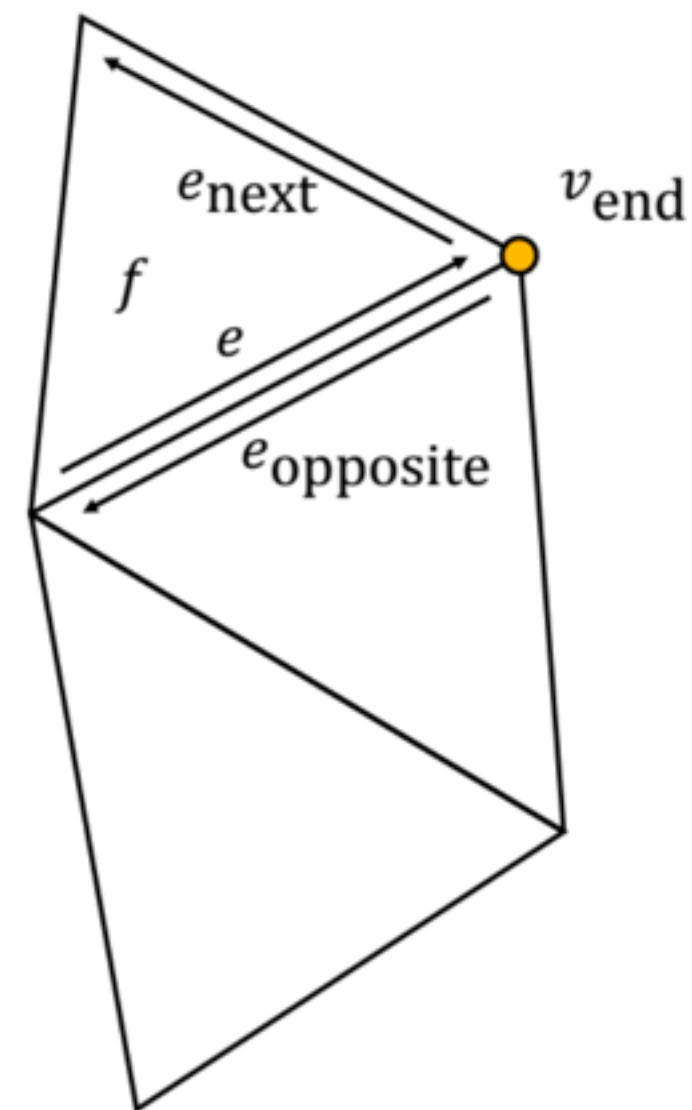
3D Reprezentációk

Háromszögháló – Adatszerkezetek

Half-Edge Data Structure

- Easy geometric queries → widely used in geometric computations
- Only manifolds

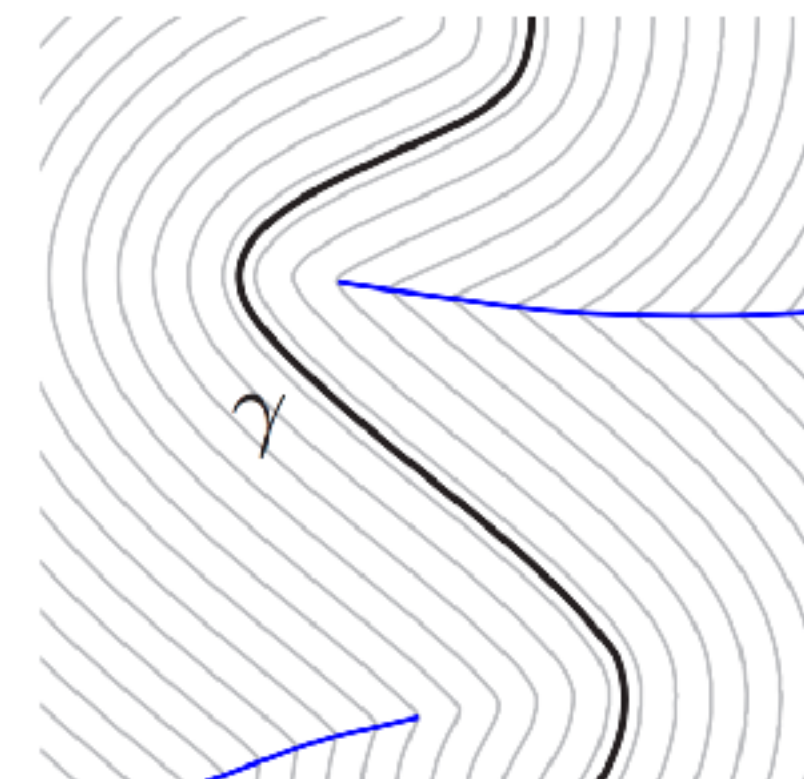
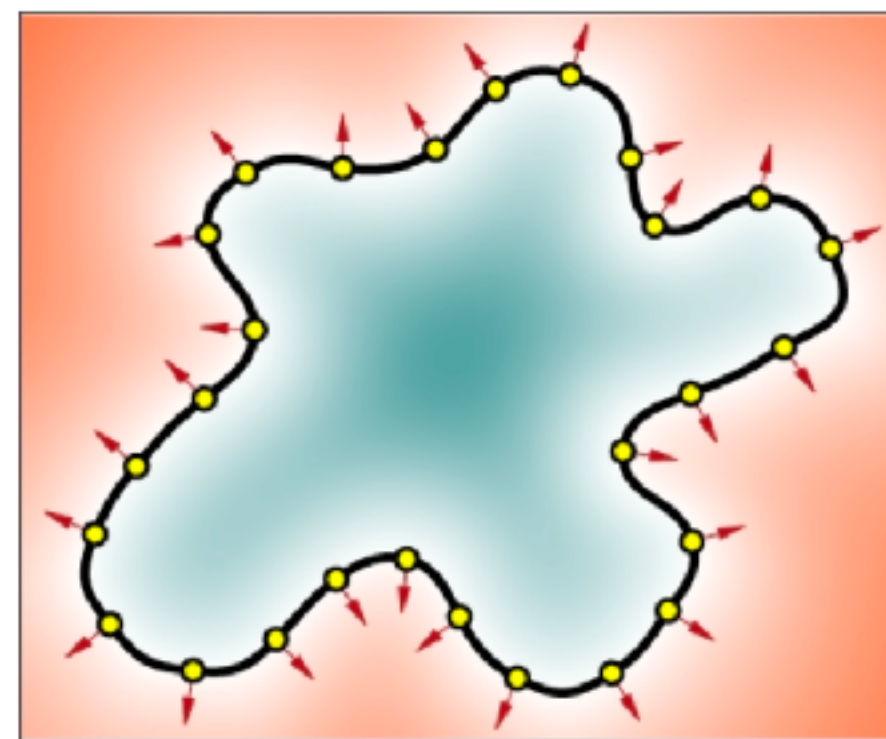
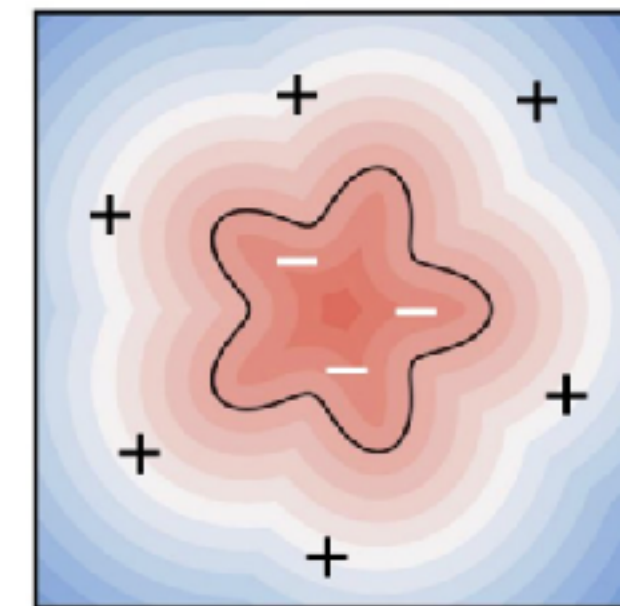
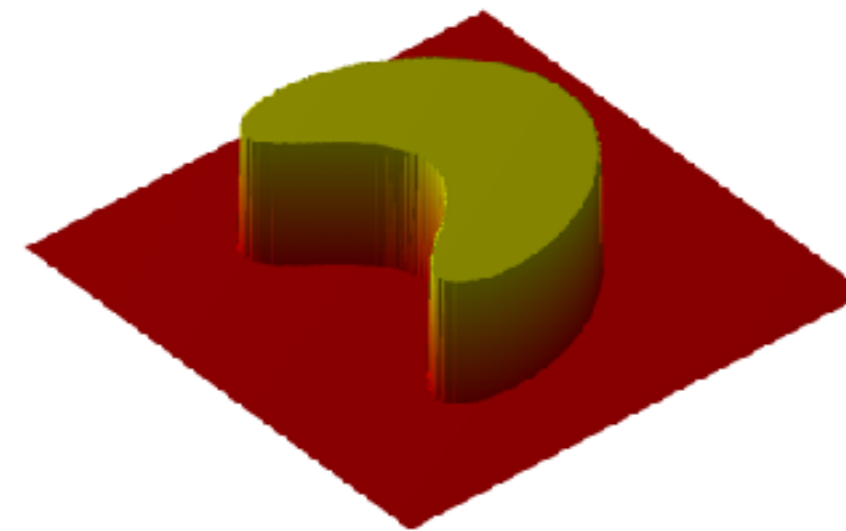
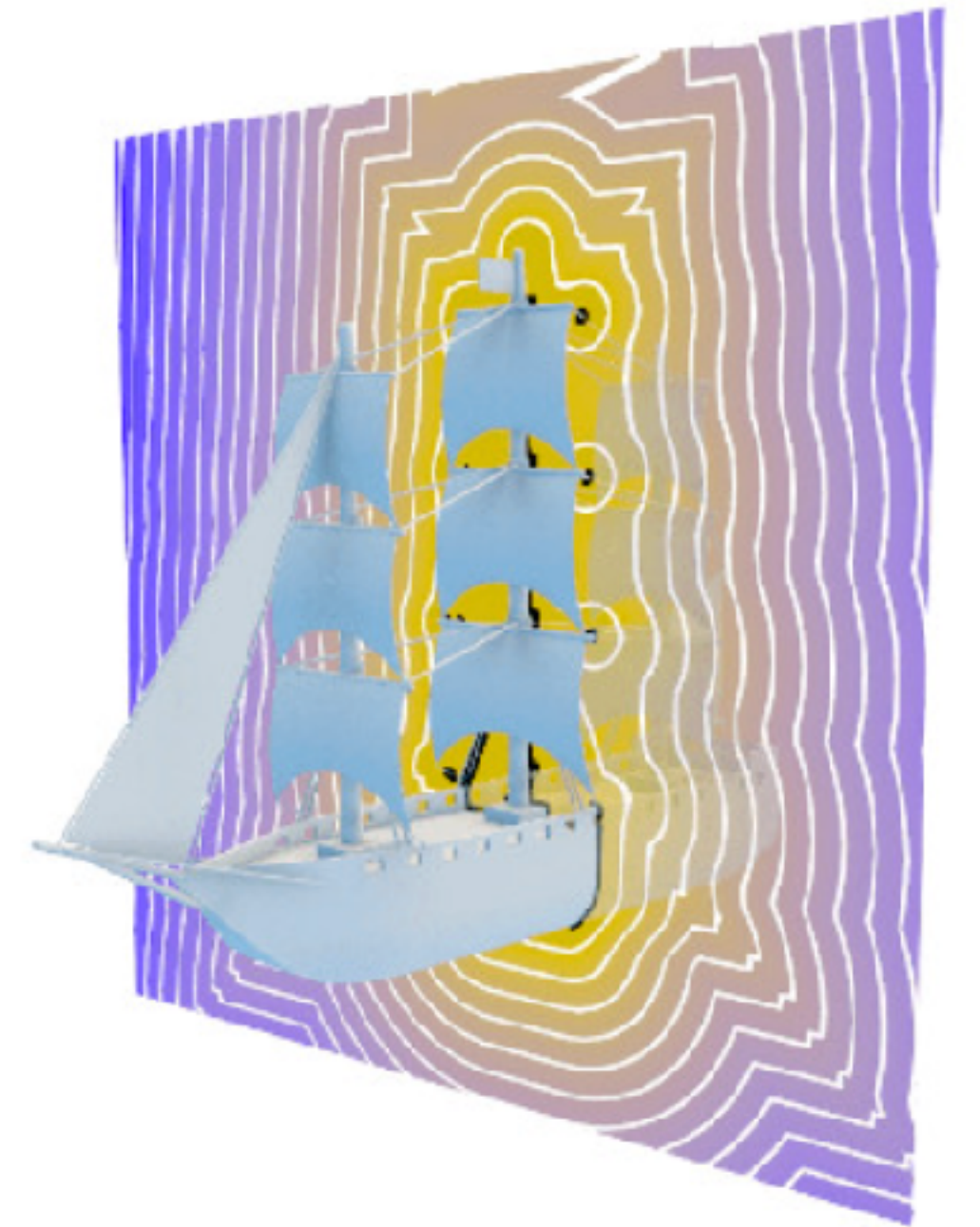
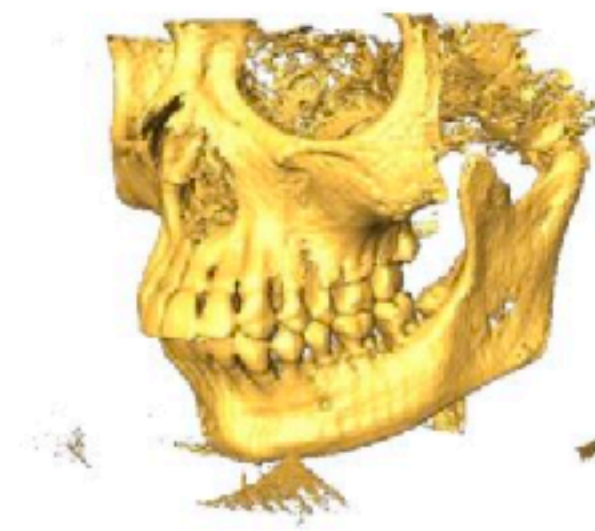
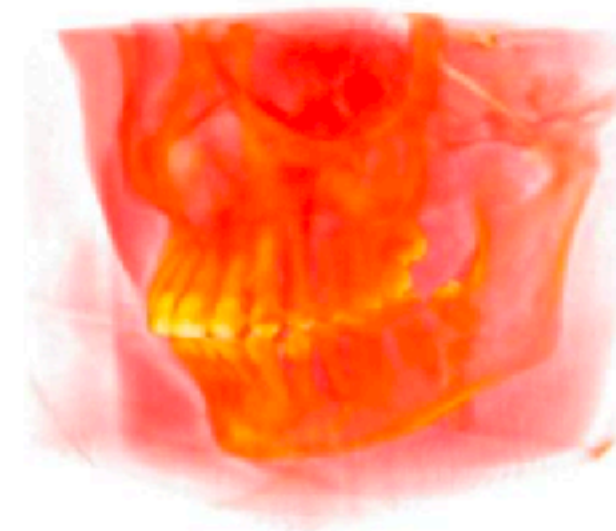
Edge	
- Edge ID	e
- End vertex	v_{end}
- Next edge	e_{next}
- Opposite edge	e_{opposite}
- Face	f
Vertex	
- Vertex ID	
- Index of one incident edge	
Face	
- Face ID	
- Index of one incident edge	



3D Reprezentációk

Implicit felületek

- Explicit függvény: $z = f(x, y)$
- Implicit függvény (“mező”): $F(x, y, z) = C$ (szintfelület)
- Különleges implicit függvények:
 - Sűrűség / opacitás / hőmérséklet / nyomás / etc.
 - **Okkupancia / (bináris) indikátor függvény**
 - **(Előjeles) Távolságfüggvény (Signed Distance Field, SDF)**
- $\nabla F(x, y, z)$: mindig merőleges a szintfelületre!!
- Távolságmezők speciális tulajdonságai:
 - $\| \nabla F(x, y, z) \| = 1$ (“eikonál egyenlet”)
 - $\nabla F(x, y, z)$ a legközelebbi felületi pontra mutat
 - $\nabla^2 F(x, y, z)$ (Hesse-mátrix) a görbülethez kötődik



-0.9	-0.4	-0.1	0.2	0.9	1	1	1	1	1
-1	-0.9	-0.2	0.1	0.5	0.9	1	1	1	1
-1	-0.9	-0.3	0.2	0.2	0.8	1	1	1	1
-1	-0.9	-0.4	0.2	0.2	0.8	1	1	1	1
-1	-1	-0.8	-0.1	0.2	0.6	0.8	1	1	1
-1	-0.9	-0.3	-0.2	0.3	0.7	0.9	1	1	1
-1	-0.9	-0.4	-0.1	0.3	0.8	1	1	1	1
-0.9	-0.7	-0.5	0.0	0.4	0.9	1	1	1	1
-0.1	-0.6	-0.2	0.1	0.4	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Truncated Signed Distance Field (TSDF)

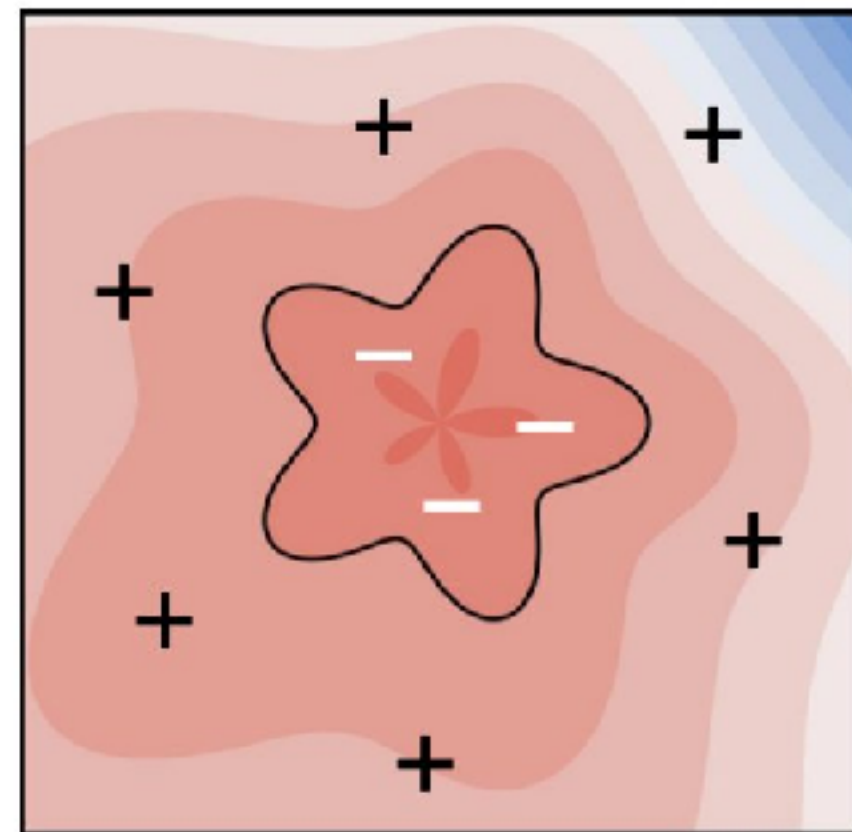
3D Reprezentációk

Implicit felületek

SDFs versus "SDFs"

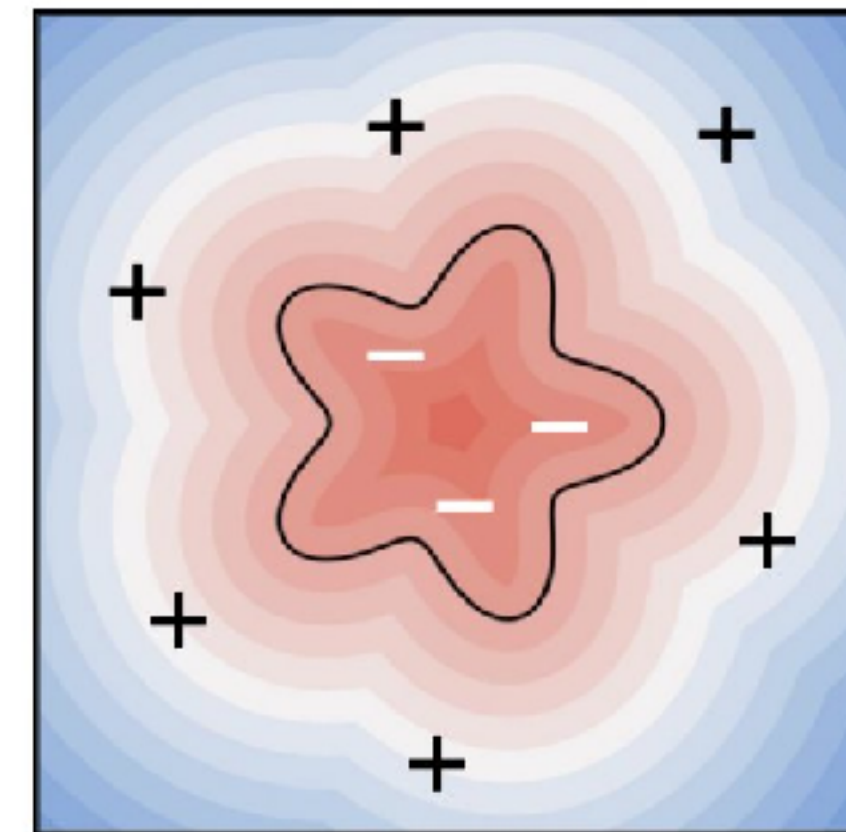
⚠ **WARNING:** term "*signed distance function (SDF)*" often used to mean a roughly distance-like function

"SDF"



sign indicates inside/outside
value gives (very) rough distance

SDF



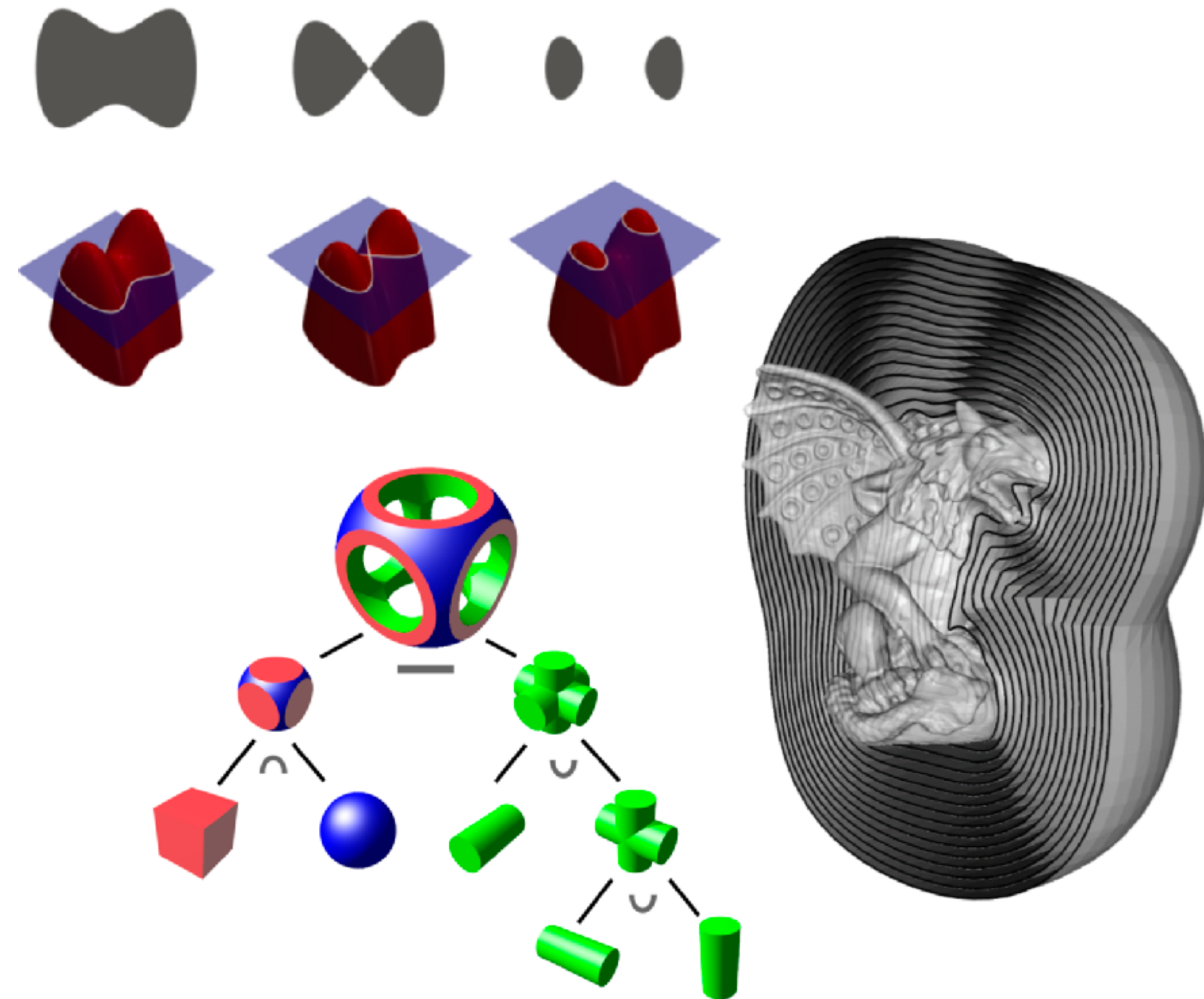
sign indicates inside/outside
value gives exact distance

helps with:
ray tracing
geometric operations
(e.g., offsets)
numerical stability
...

3D Reprezentációk

Implicit felületek

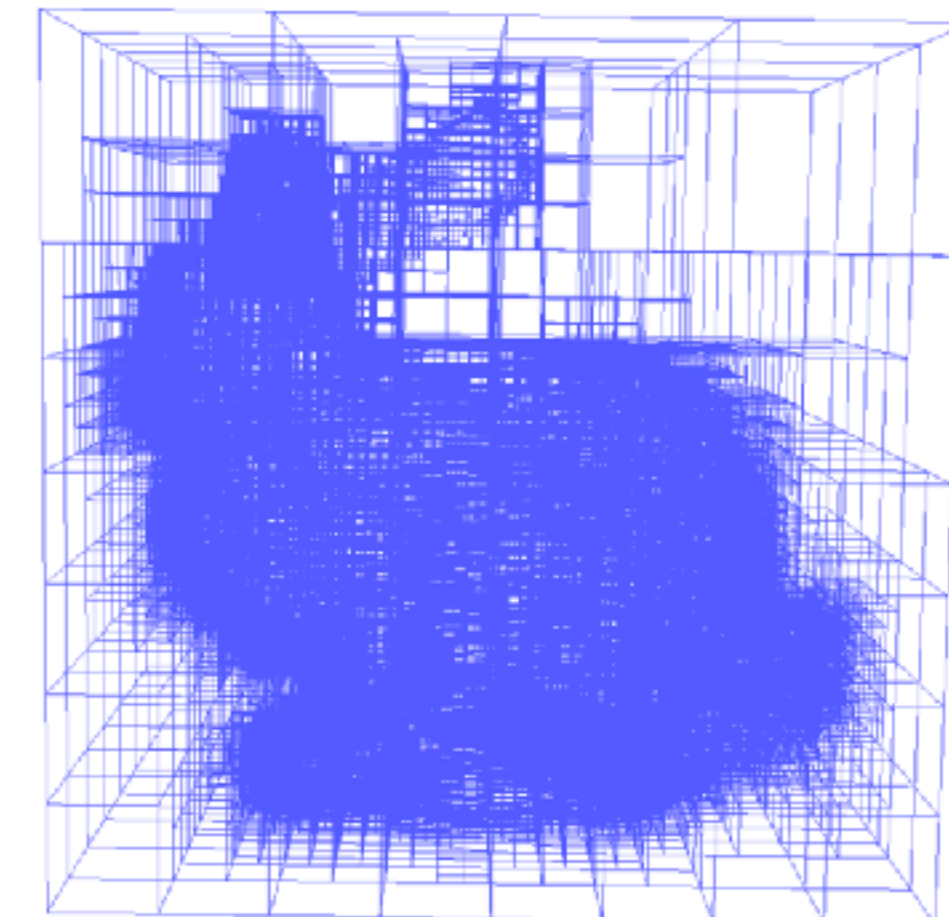
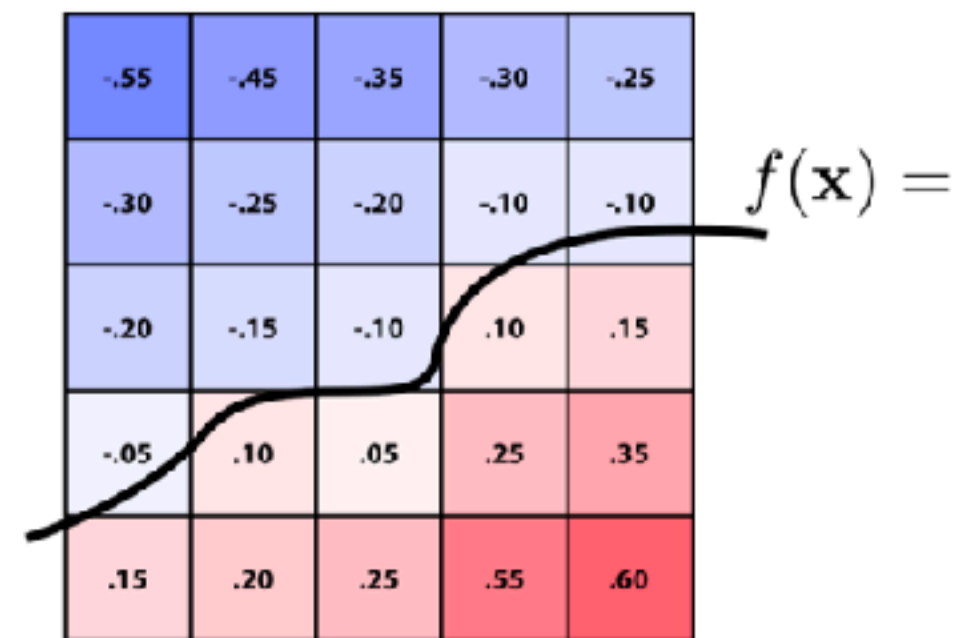
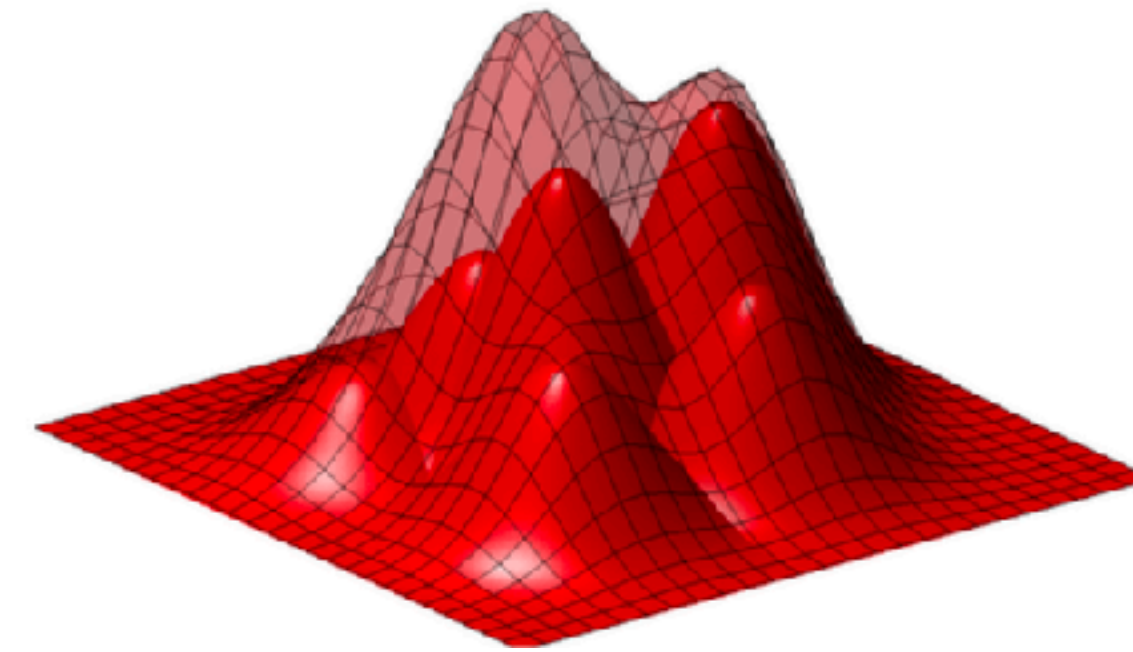
- Előnyök:
 - Általános topológia
 - Egyszerű Boolean (“CSG”)
 - Egyszerű offsetelés
 - Térfogatot is reprezentál!
- Hátrányok:
 - A felületet ki kell nyerni
 - A szintfelületeknek nem lehet pereme



3D Reprezentációk

Implicit felületek – Adatszerkezetek

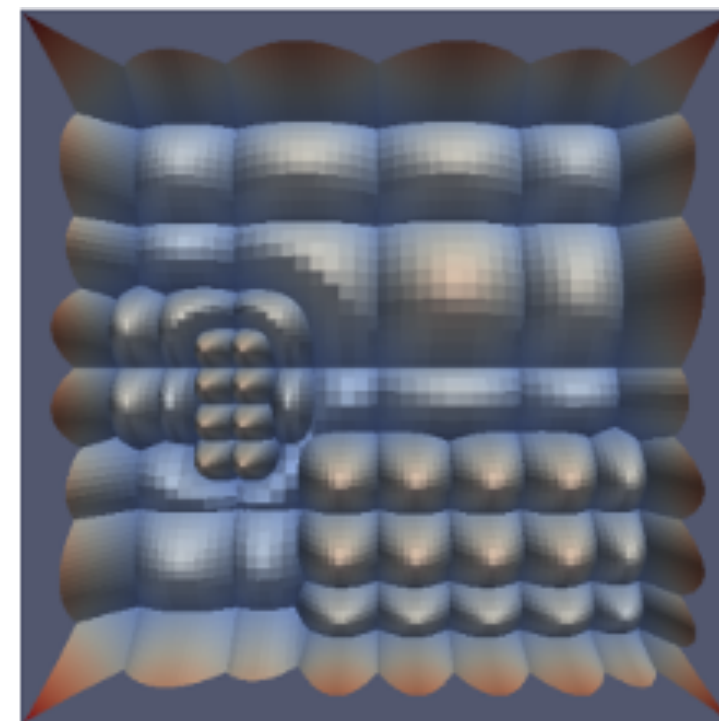
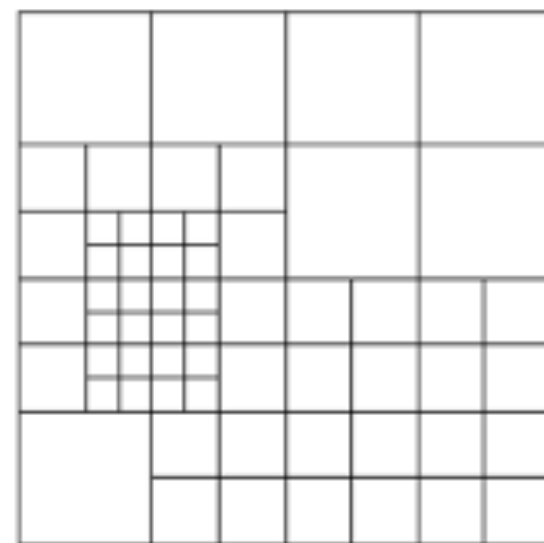
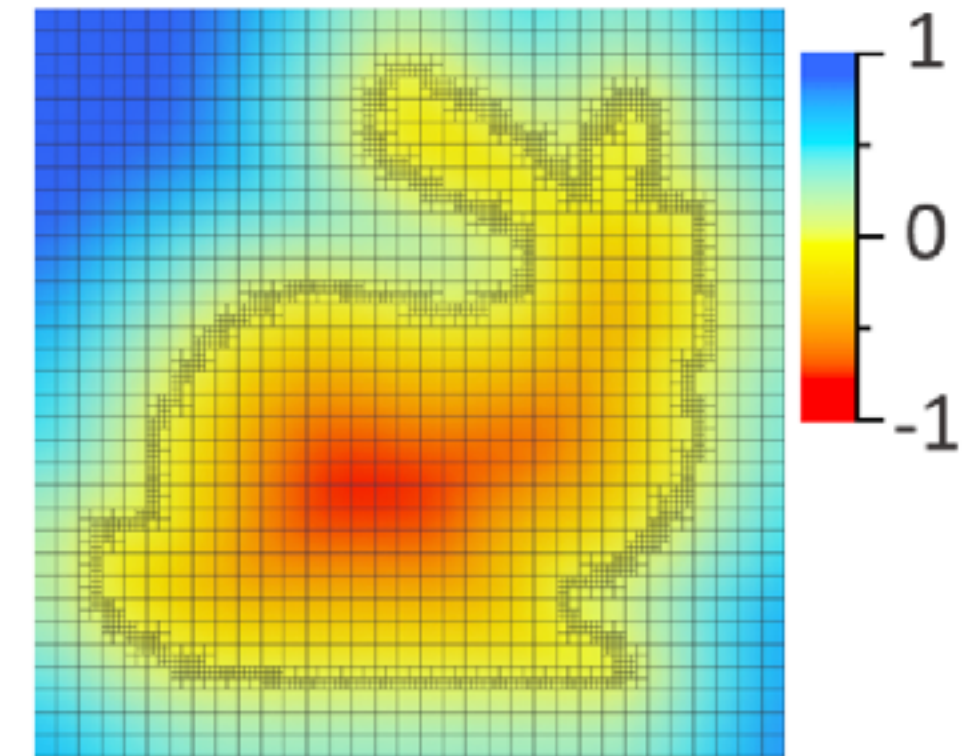
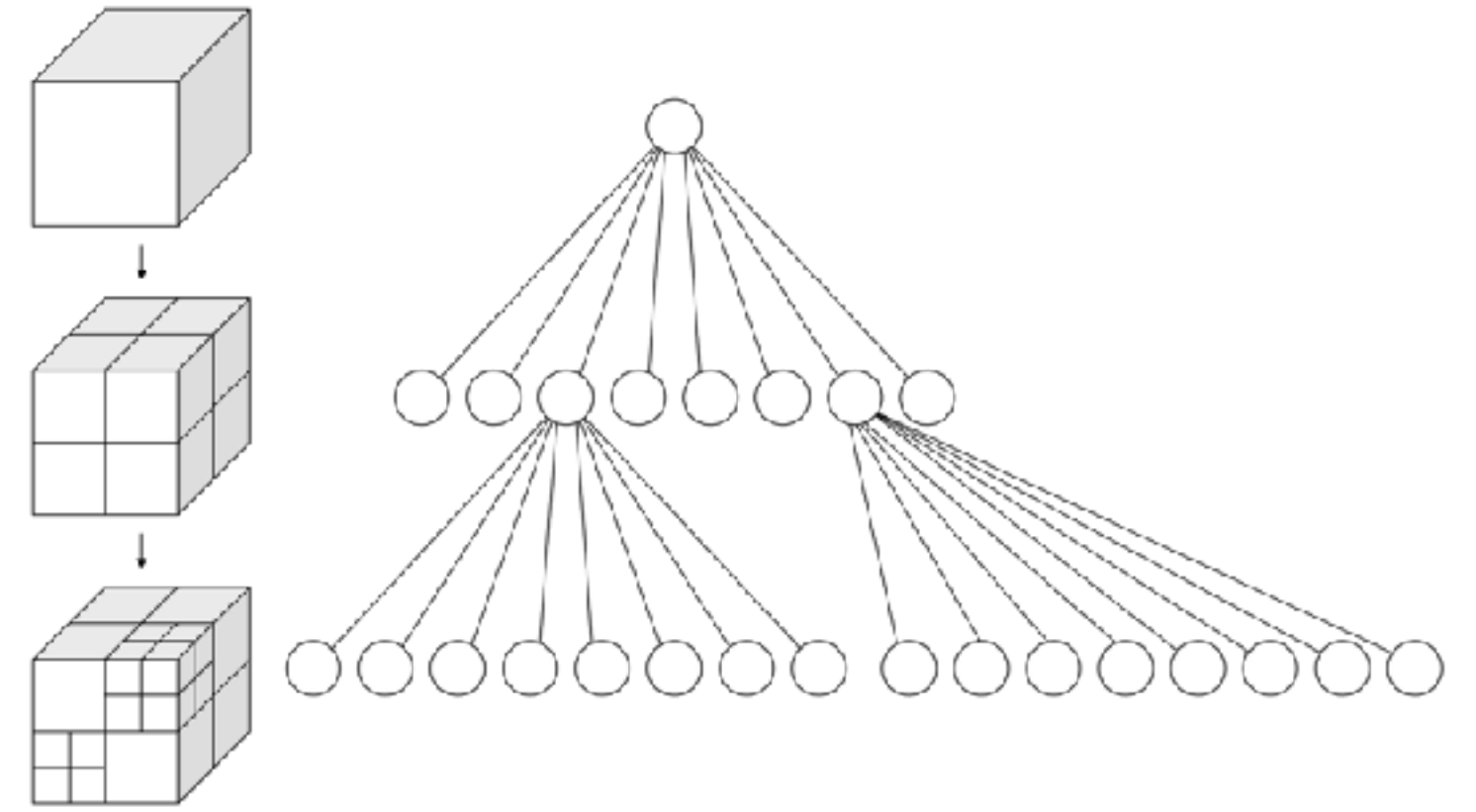
- Algebrai képletek – csak primitív alakzatokra ismertek
- Parametrizált függvények: RBF, spline, neurális hálózat(!!!)
- Diszkretizáció szabályos rácson: skálázódási problémák
- Adaptív rács



3D Reprezentációk

Implicit felületek – Adatszerkezetek

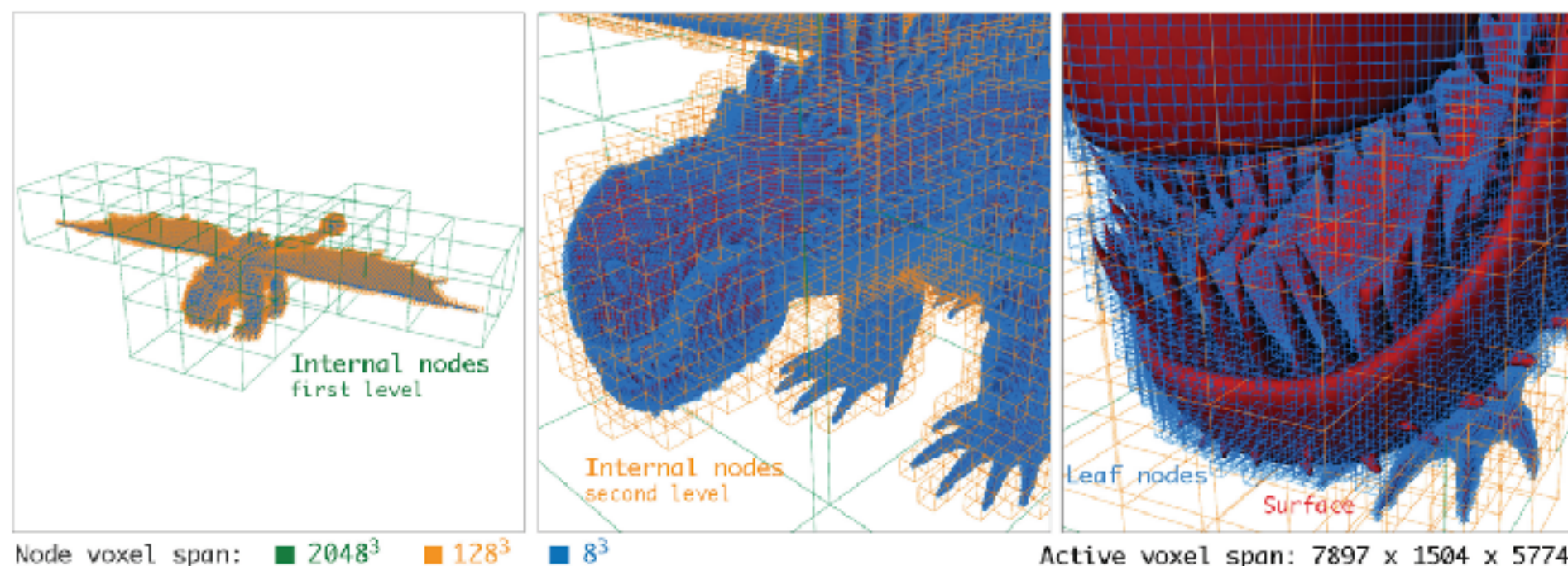
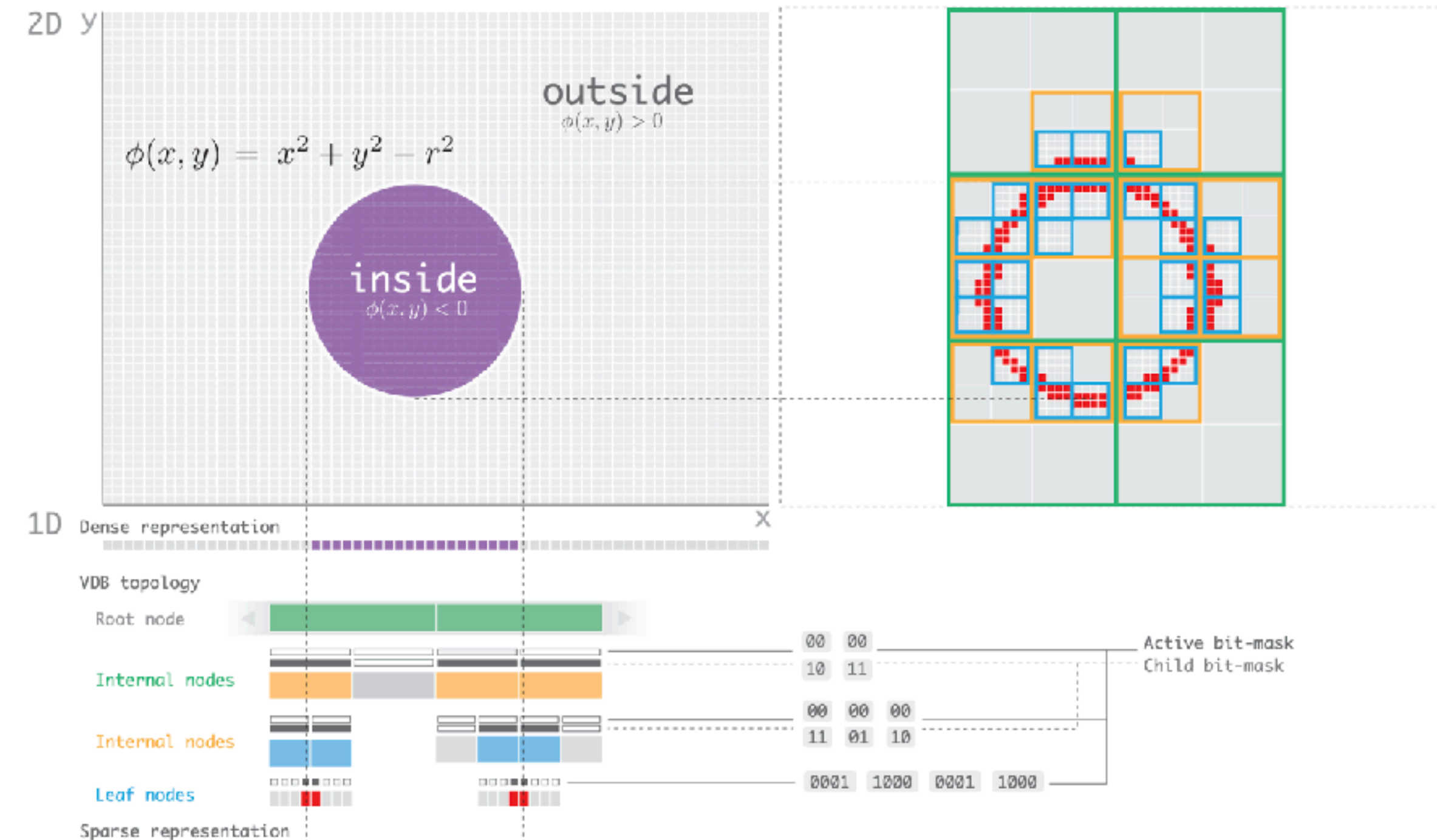
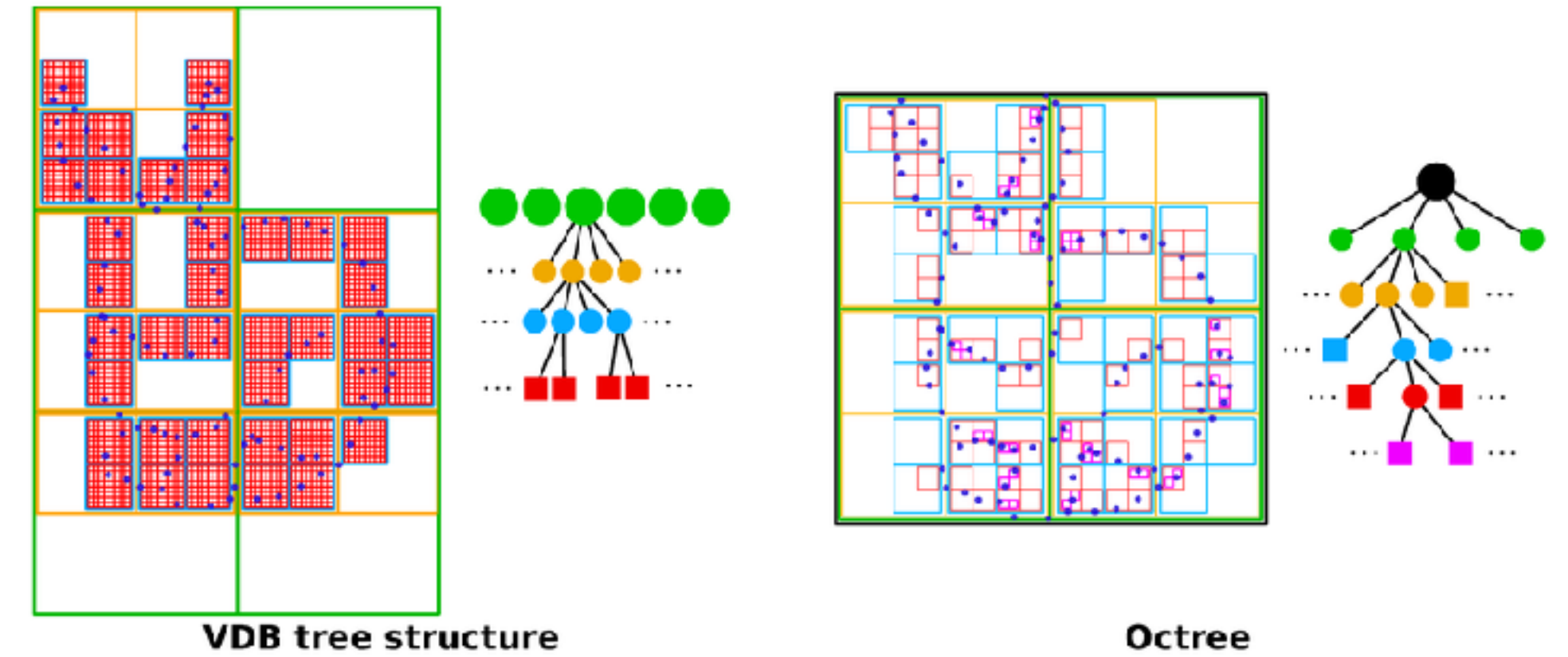
- Oktális fa (octree)
- Cellák felosztása, amíg a hiba tolerancia alá nem csökken
- Interpolációs módszerek:
 - Trilineáris
 - Hierarchikus spline



3D Reprezentációk

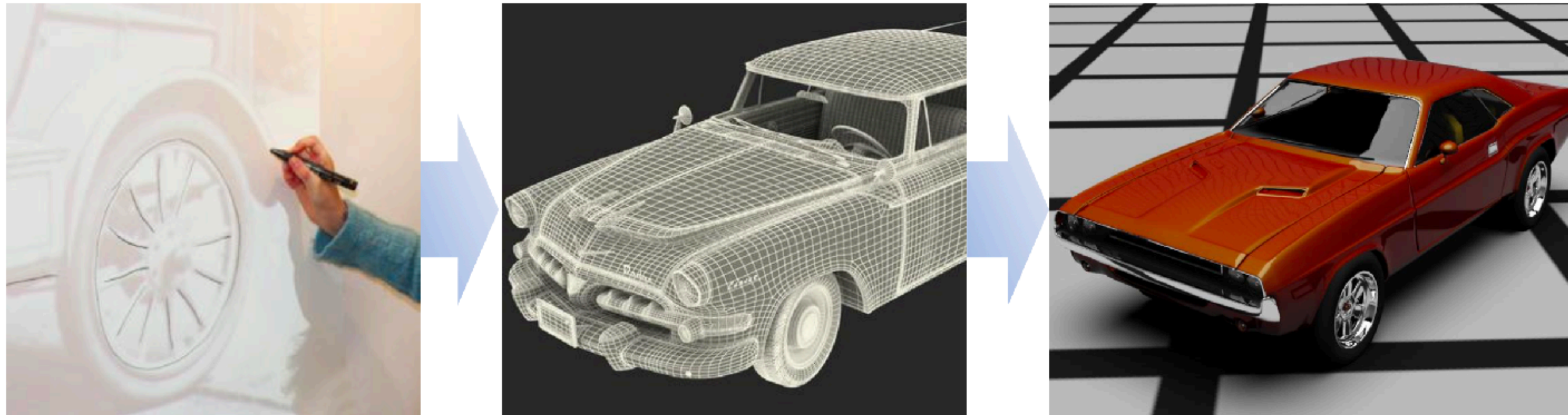
Implicit felületek – Adatszerkezetek

- Volumetric, Dynamic B+ Tree (**VDB**)
- Végtelenségig növekvő, sekély fa (fix mélység – tipikus értéke: 4!!)
- $O(1)$ írás/olvasás mérettől függetlenül!!!
- VFX ipari standard, open source implementáció: OpenVDB



3D Adatok Előállítása

3D modellezés



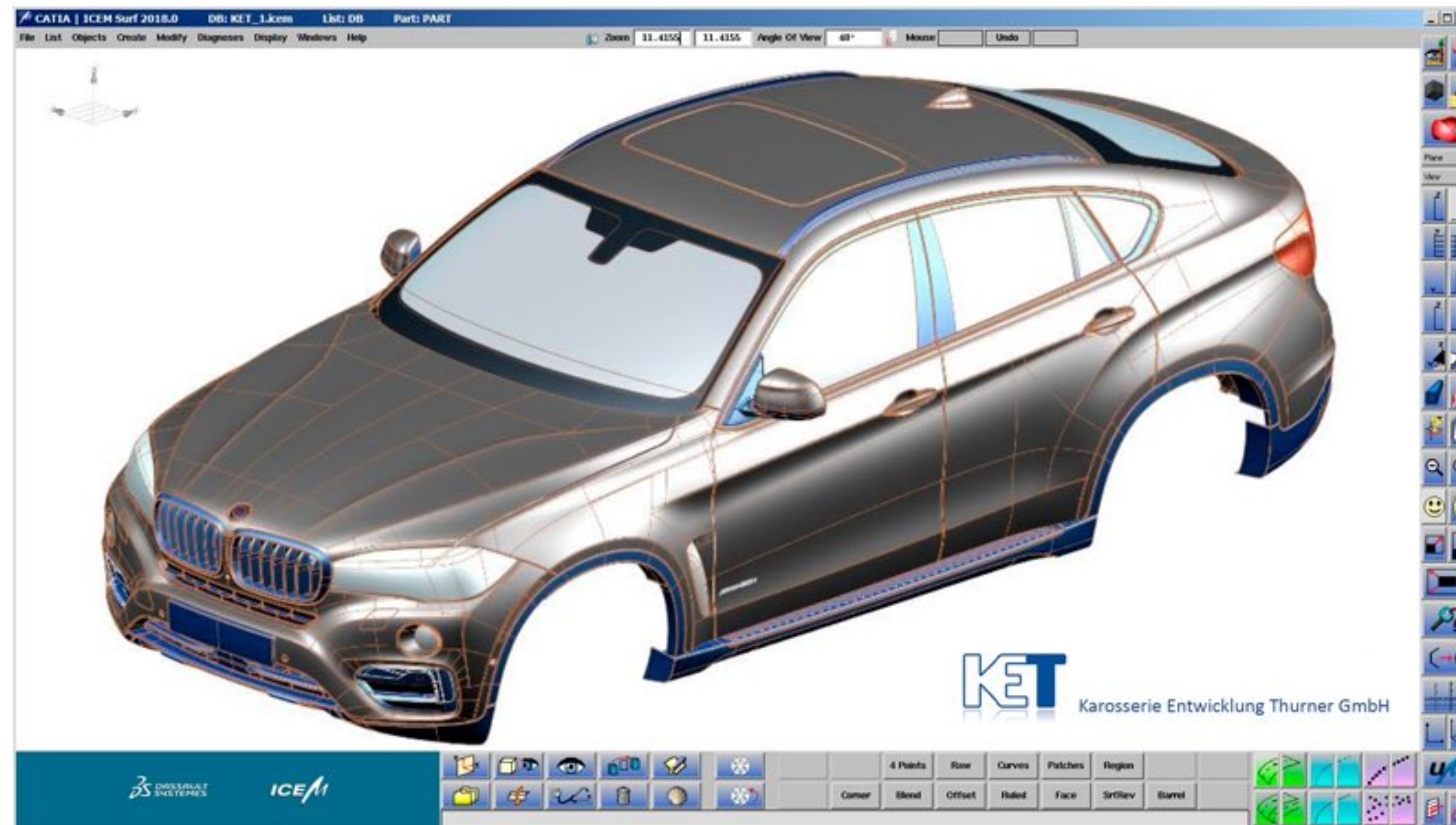
Content Creation

Visualization / Rendering

Digitális Tartalomelőállítás (pl. játékok / filmek):
fókusz a vizuális megjelenésen és a hatékony renderelésen

3D Adatok Előállítása

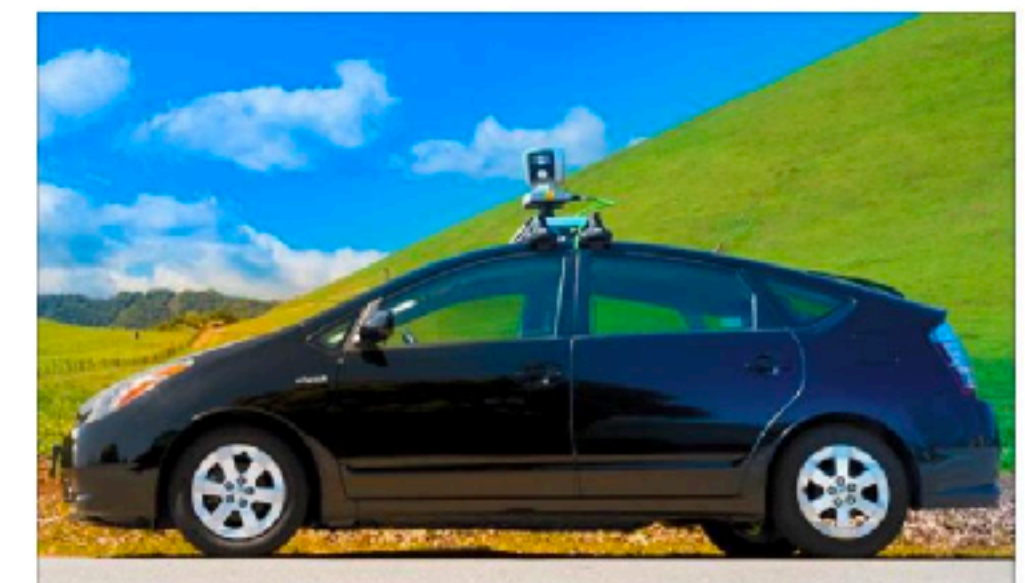
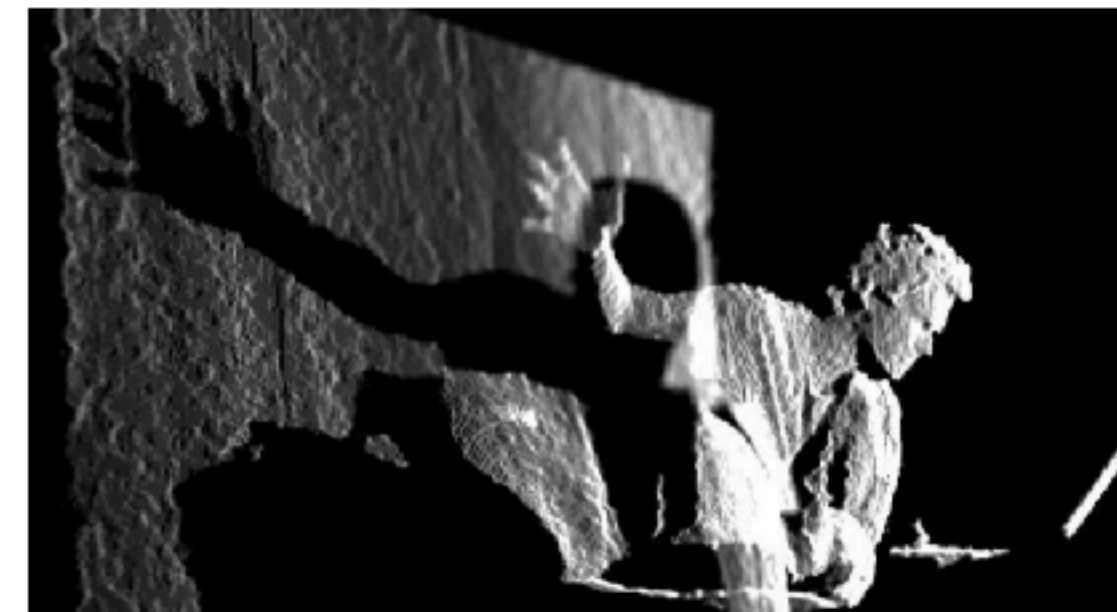
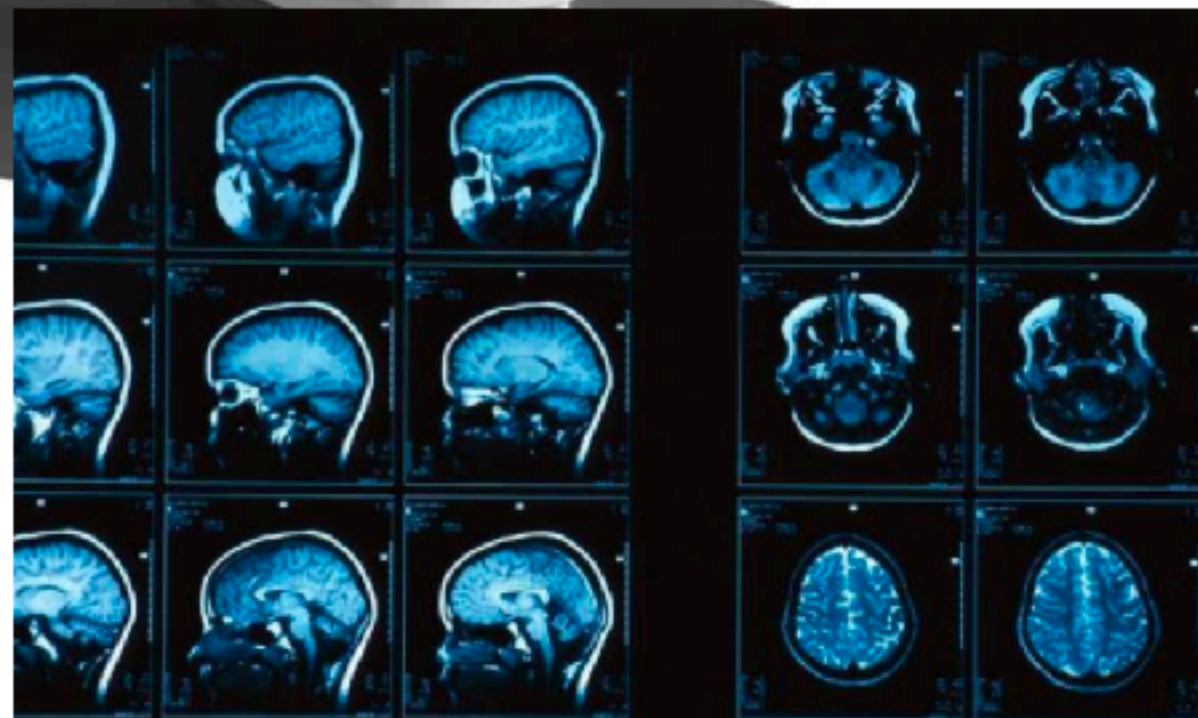
3D modellezés



Számítógéppel segített tervezés (Computer-Aided Design ,CAD) —
fókusz a geometrai és fizikai tulajdonságokon, gyárthatóságon

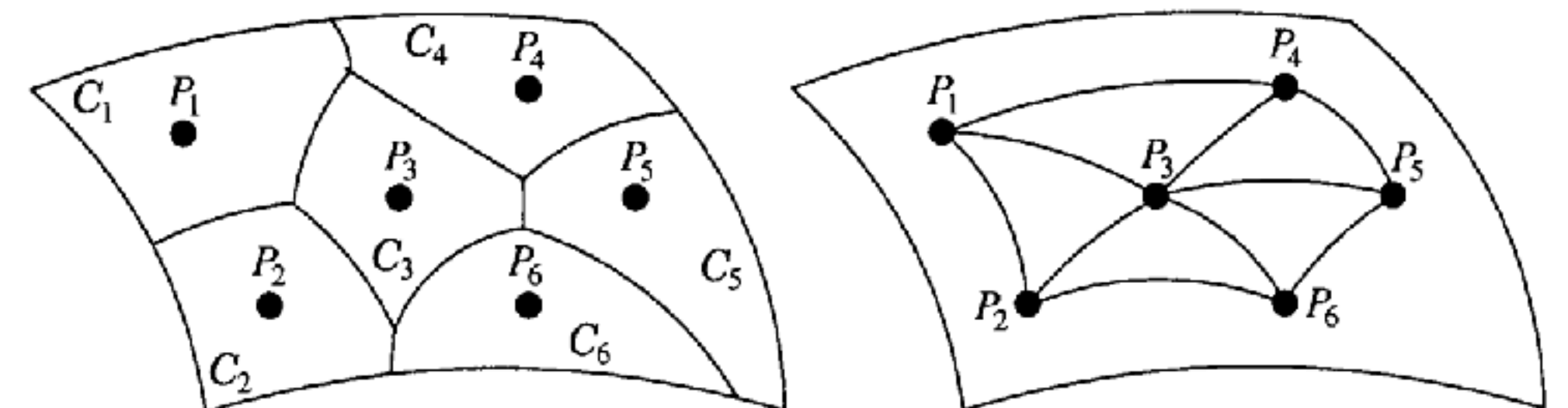
3D Adatok Előállítása

3D szenzorok



Konverzió Reprezentációk Között

- Háló \Rightarrow Pontfelhő
 - Szimplán ignoráljuk a topológiát
 - Alternatívák: Furthest Point Sampling (FPS), Poisson Disk Sampling
- Pontfelhő \Rightarrow Háló
 - Direkt háromszögelés geometriai algoritmusokkal (Delaunay / Voronoi)
 - Gyakori alternatíva: konvertálás implicit felületté!



Konverzió Reprezentációk Között

Implicit felület \Rightarrow Háló

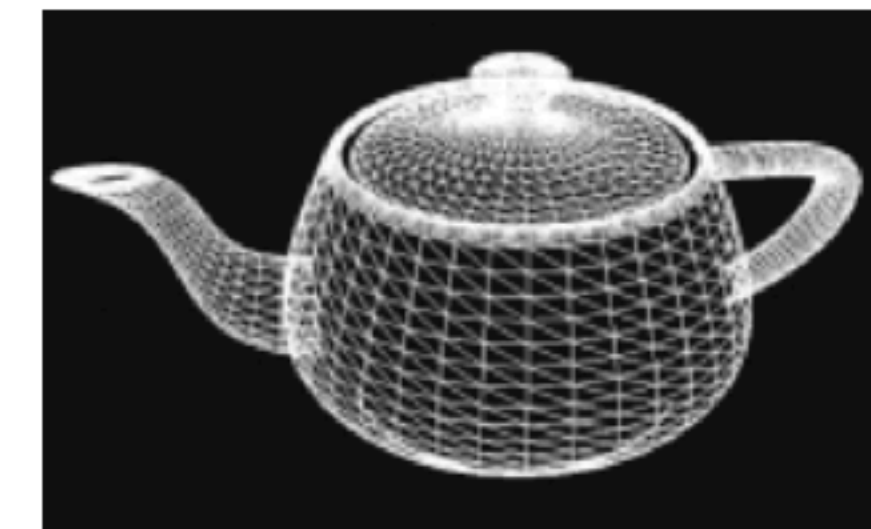
Signed Distance Field



Meshing



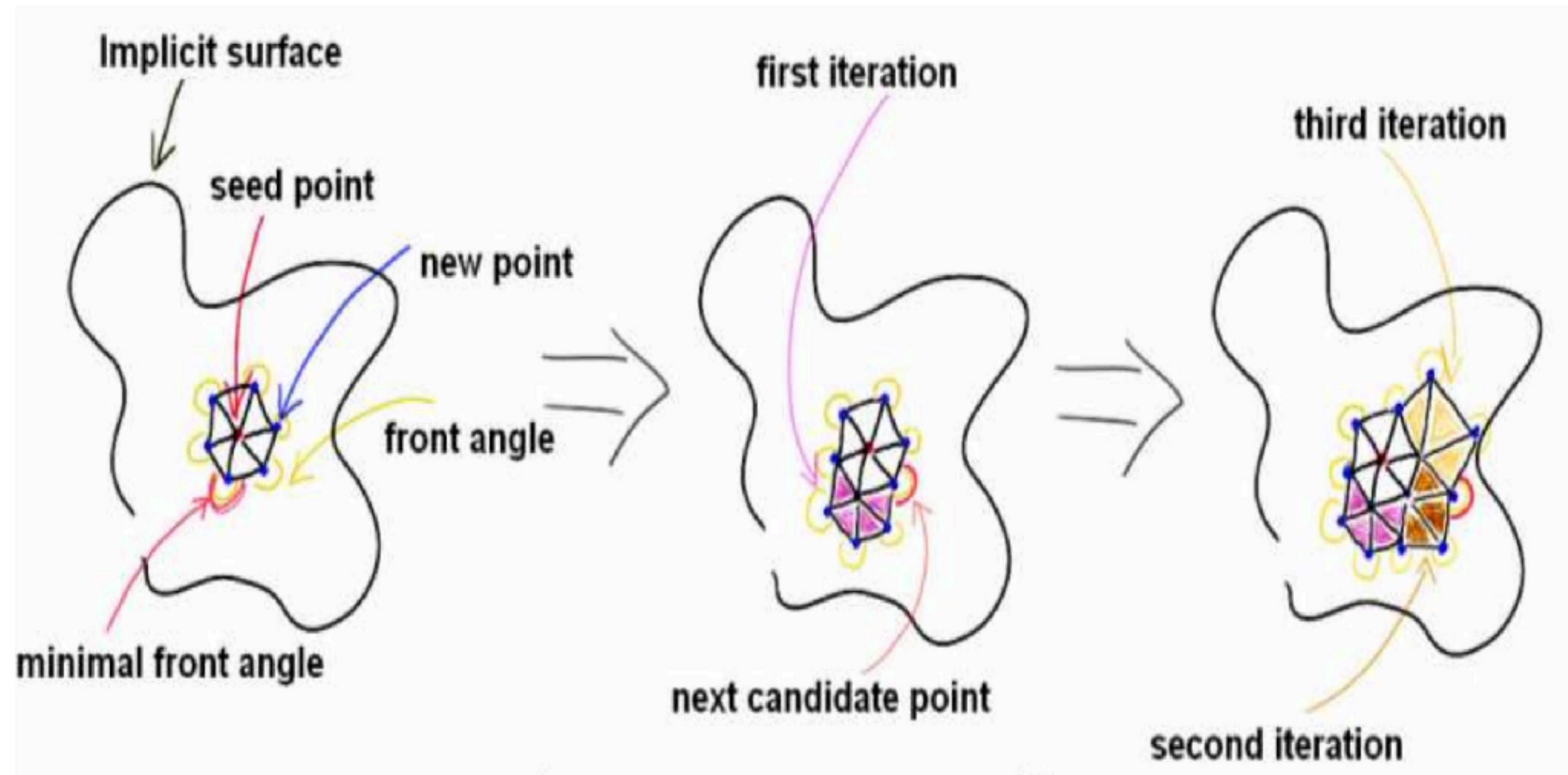
Mesh



A.k.a. poligonozáció, extrakció, contouring, stb.

Konverzió Reprezentációk Között

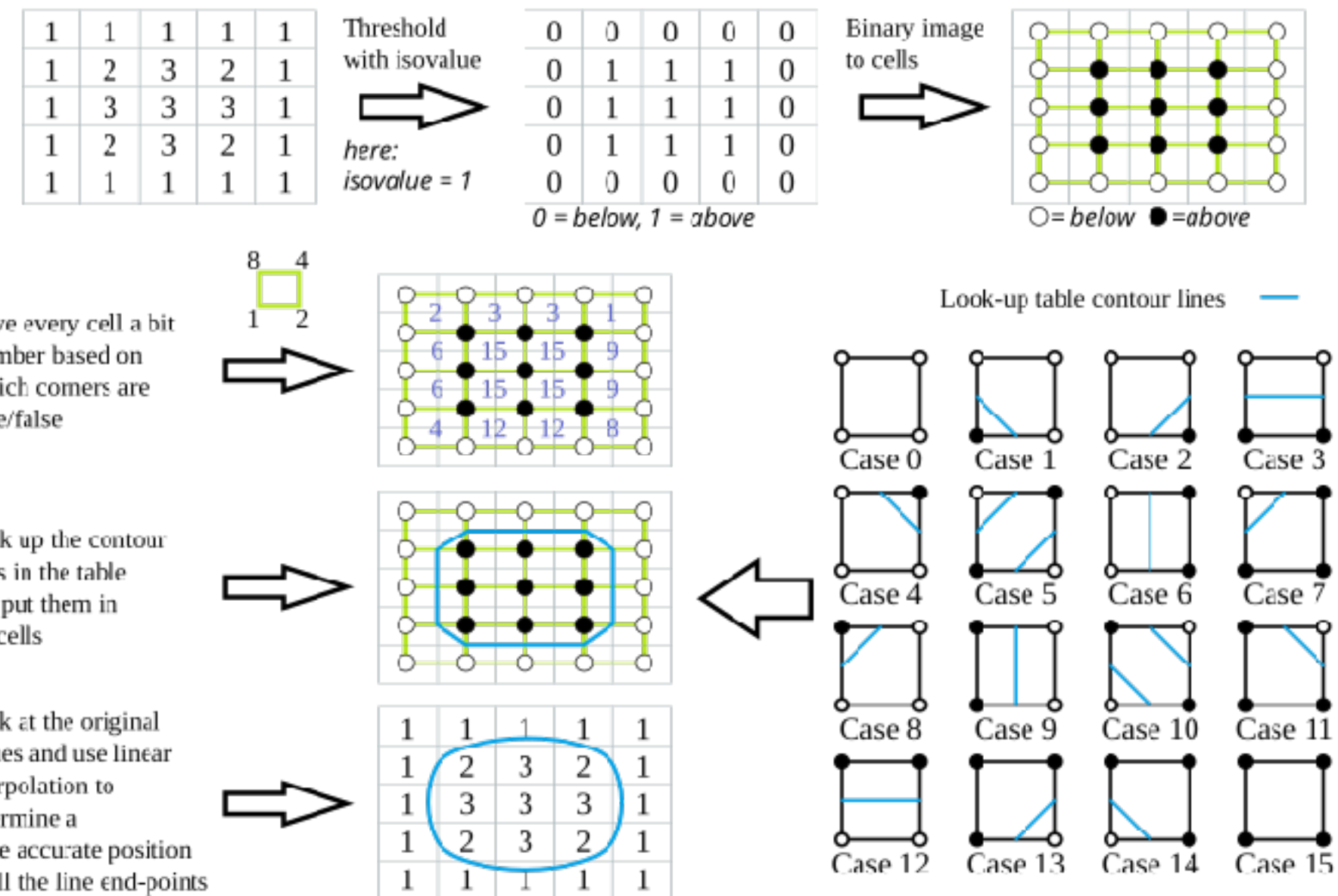
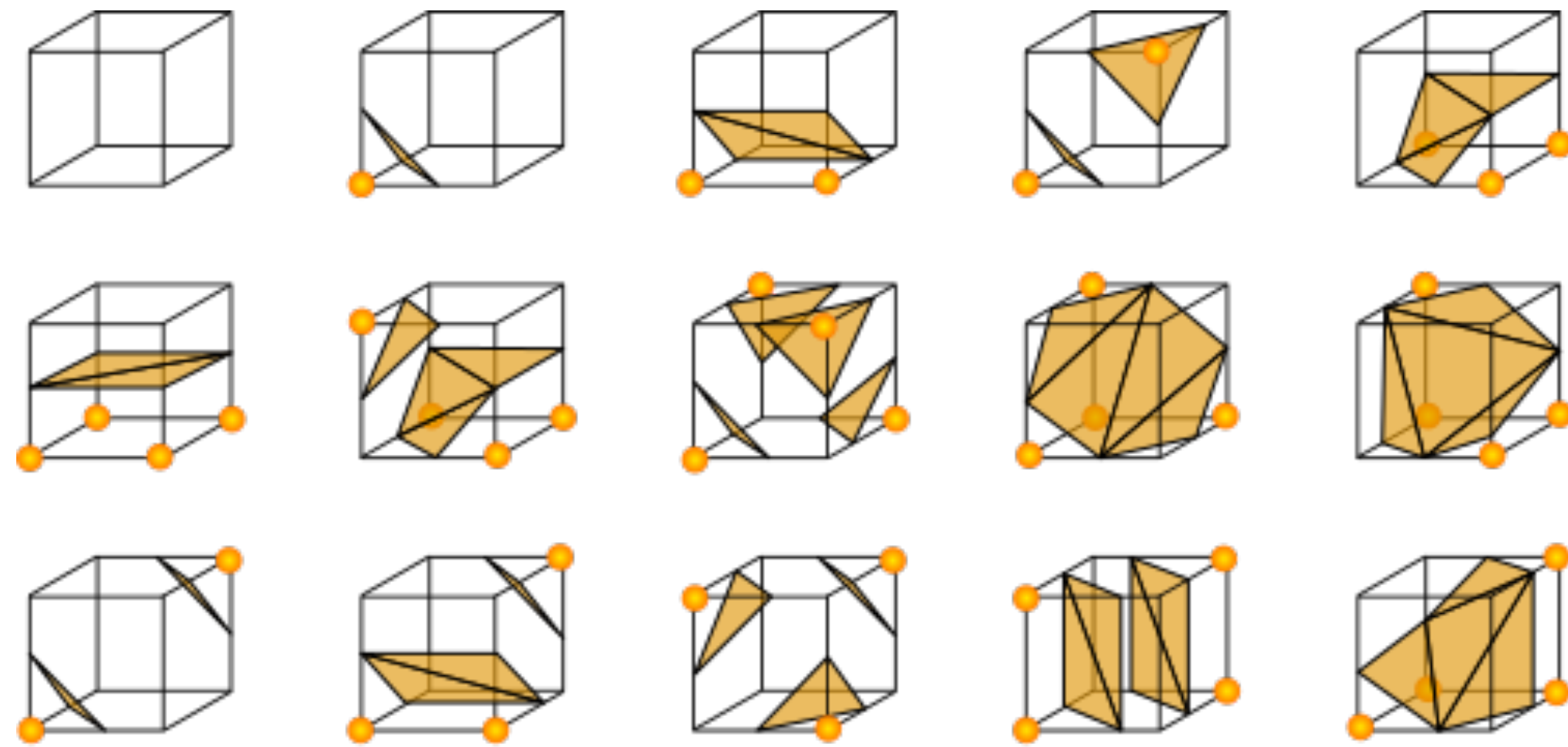
Implicit felület \Rightarrow Háló – Régiónövesztés



Régiónövesztés (region growing)

Konverzió Reprezentációk Között

Implicit felület \Rightarrow Háló – Masírozó kockák (Marching cubes)

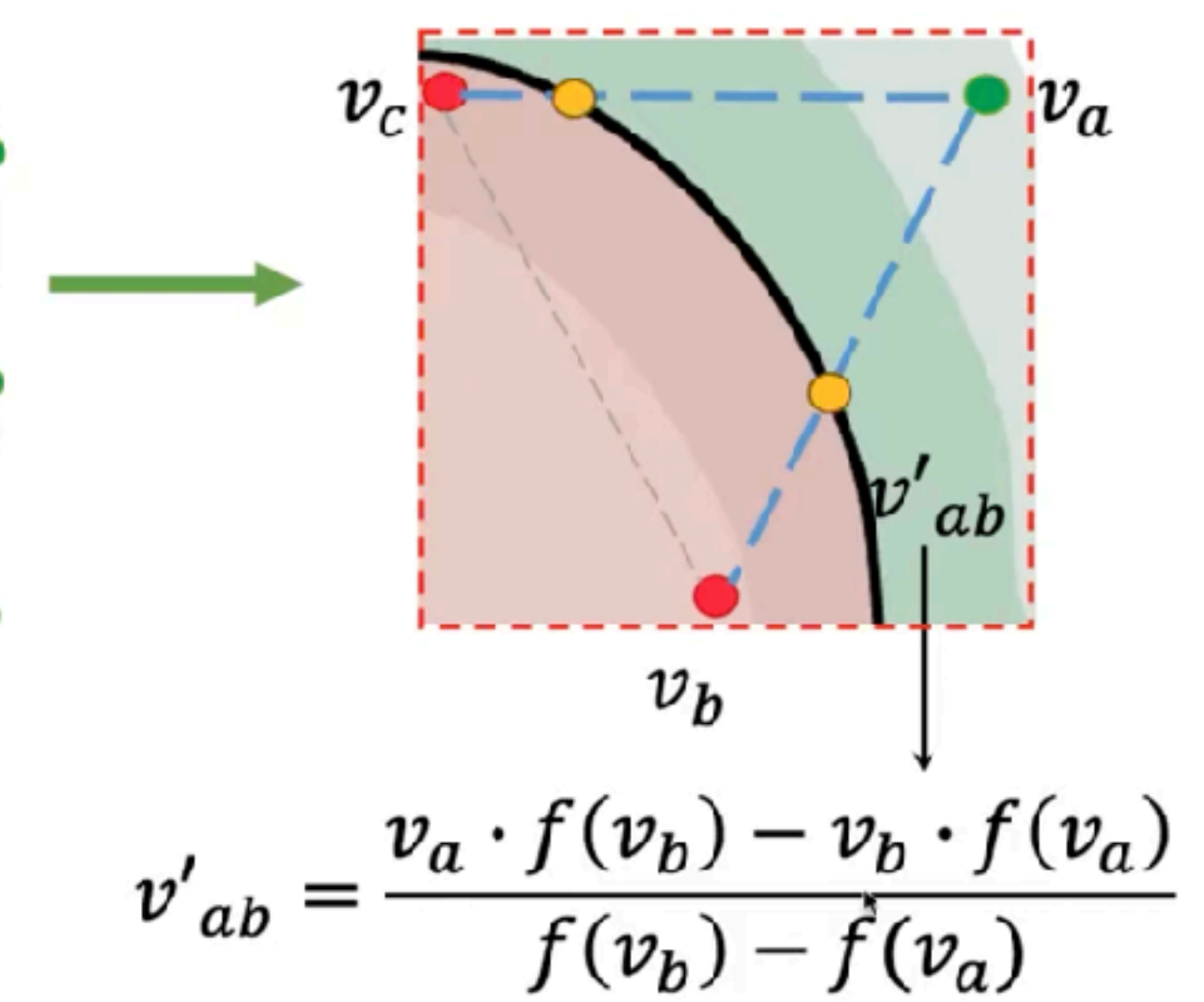
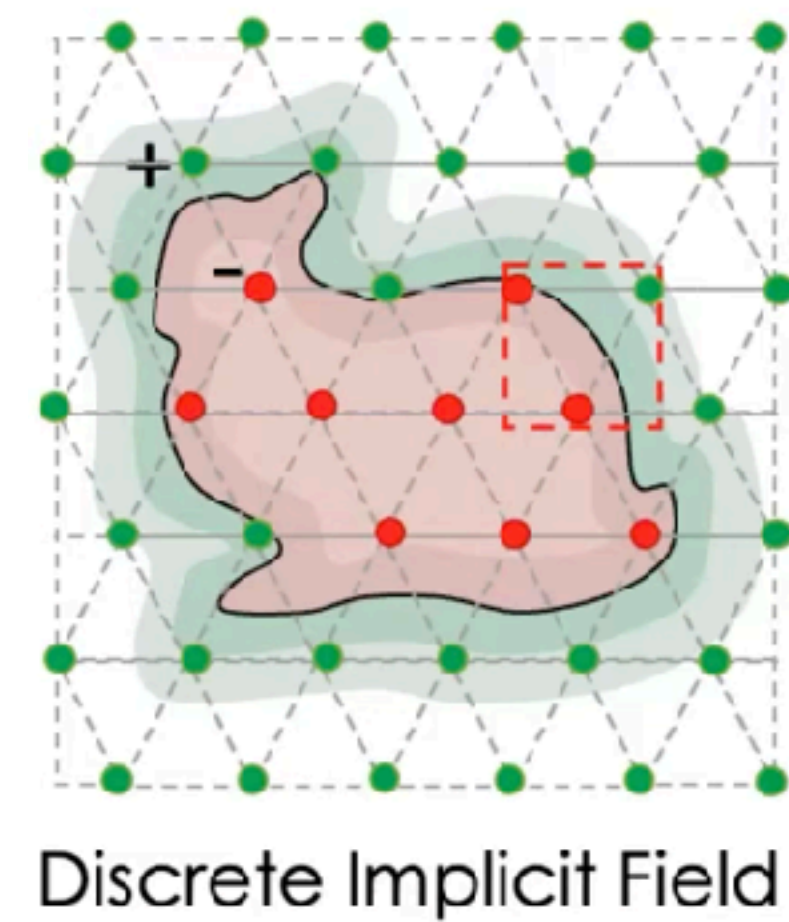
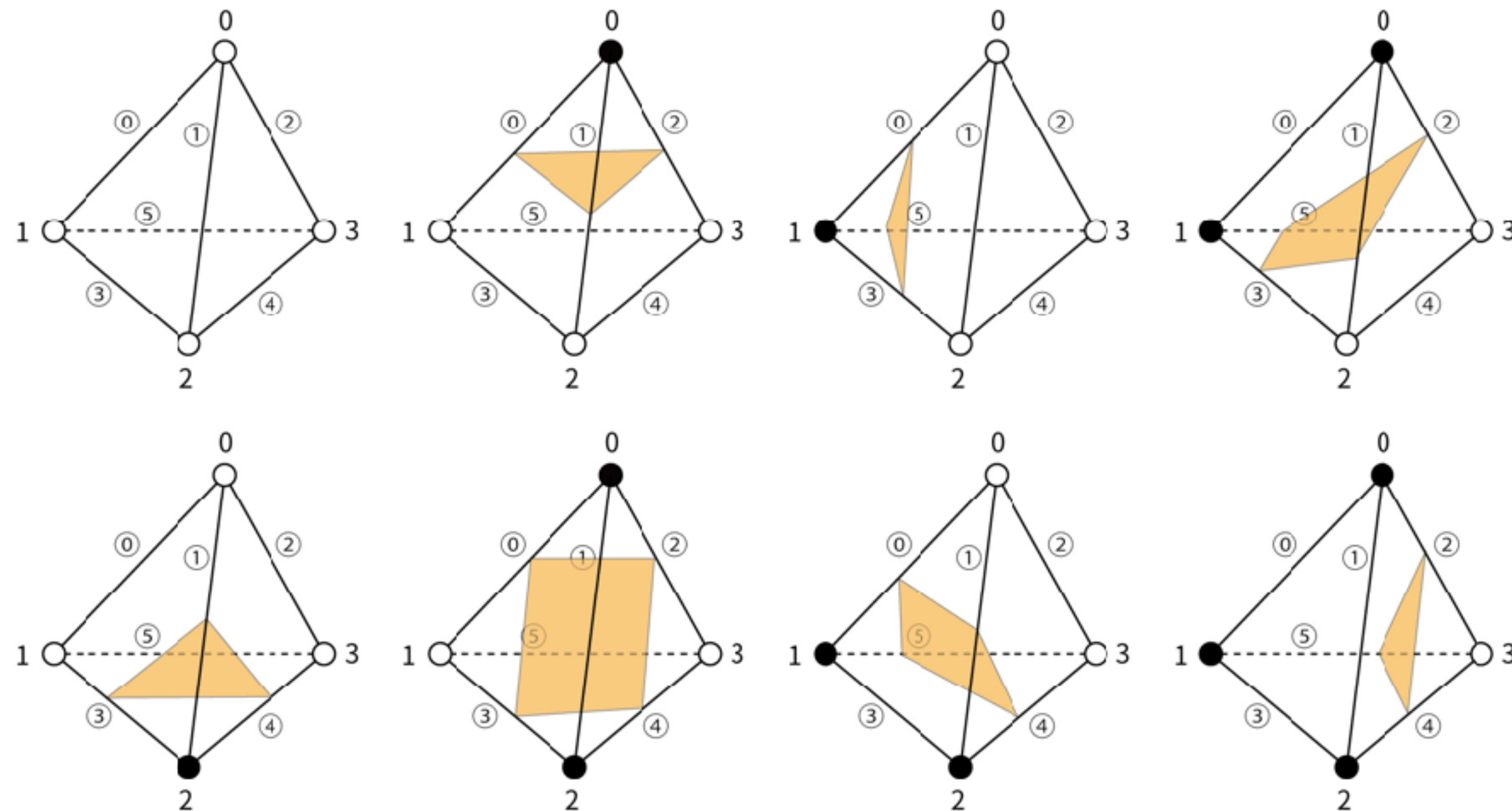


Marching Cubes – Lehetséges konfigurációk

2D megfelelő: Marching Squares

Konverzió Reprezentációk Között

Implicit felület \Rightarrow Háló – Masírozó Tetraéderek



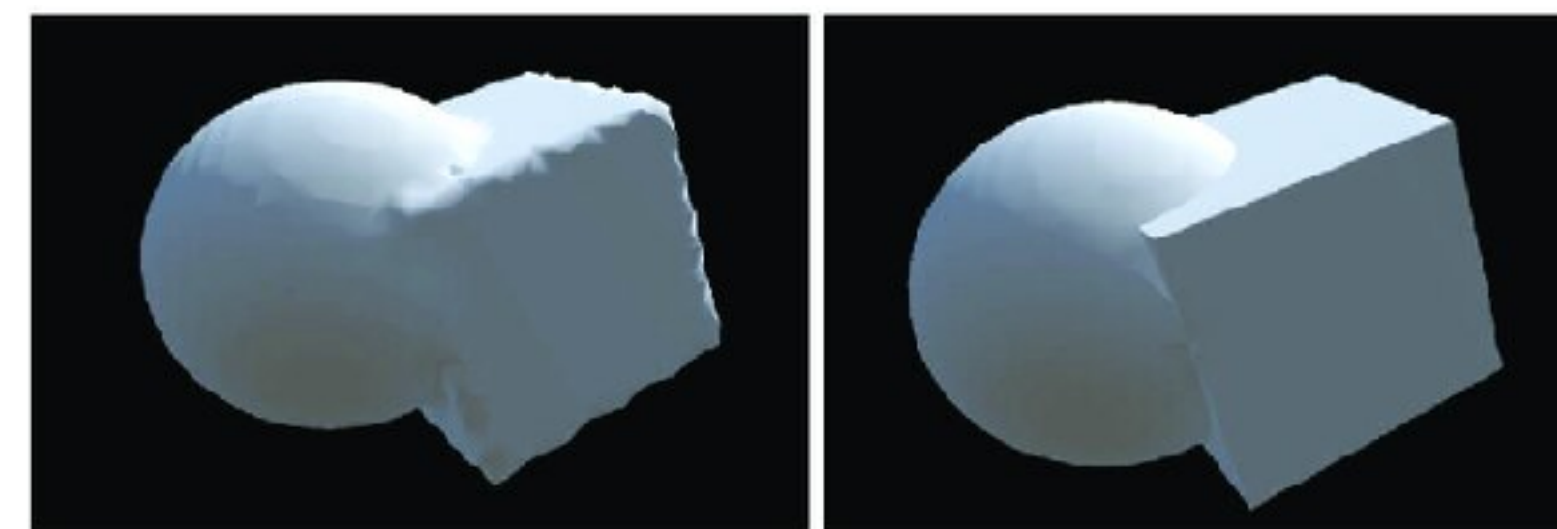
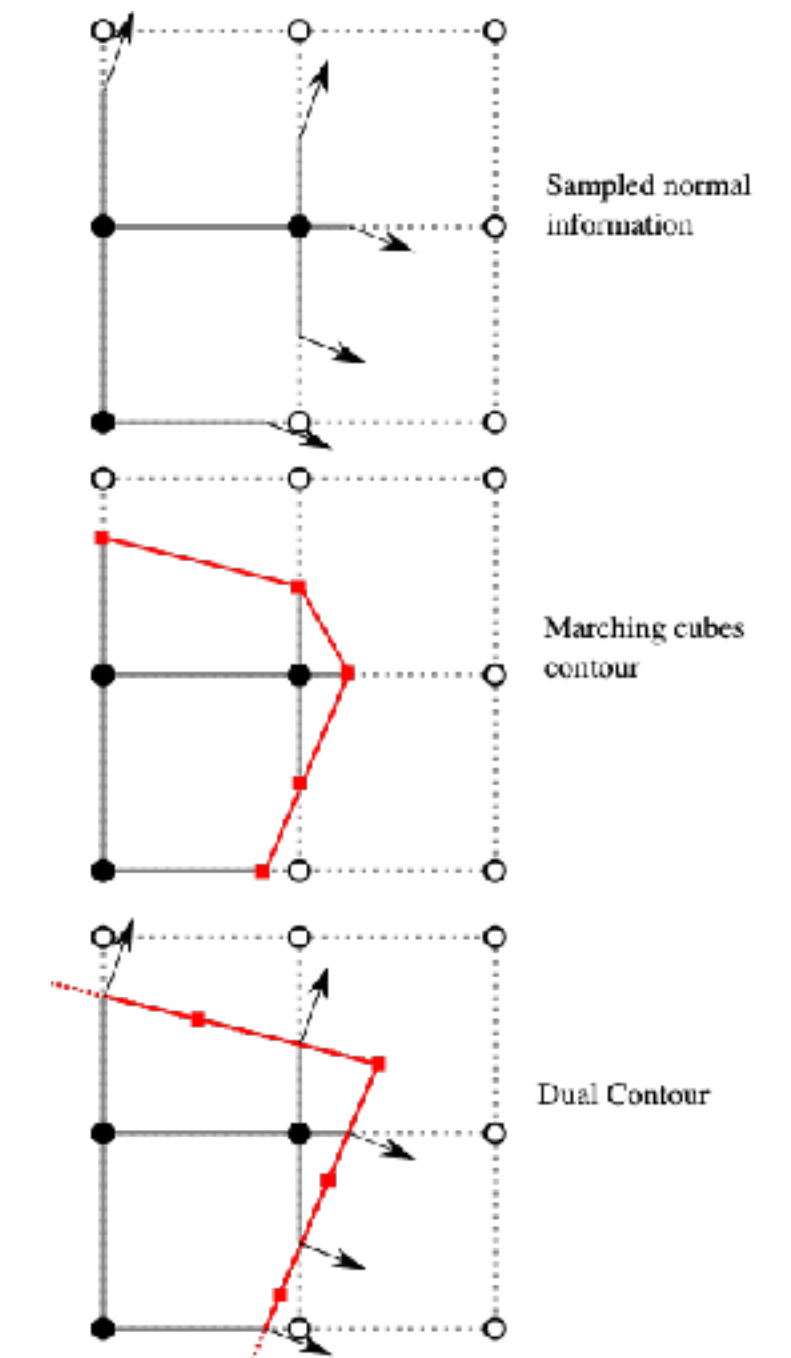
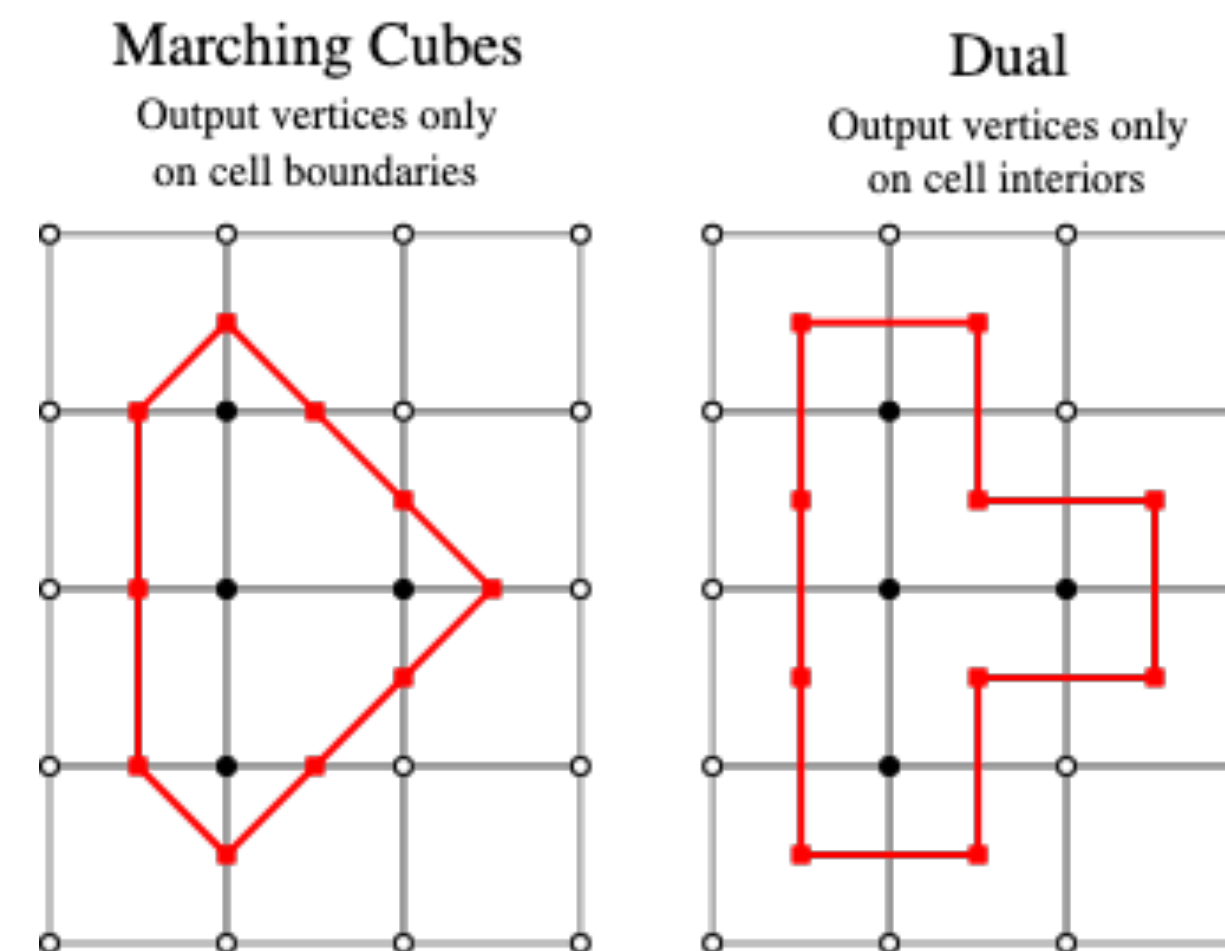
Marching Tetrahedra: Lehetséges konfigurációk

2D megfelelő: Marching Triangles

Konverzió Reprezentációk Között

Implicit felület \Rightarrow Háló – Dual Contouring

- A masírozó kockák/tetraéderek levágják az éles sarkokat! (vertex csak cella élekre kerülhet)
- **Dual Contouring:**
 - Helyezzünk el “*duális*” pontokat a cellák belsejében (normálisok / gradiensek alapján, pl. síktól vett távolságokat optimalizálva)
 - Kössük össze a szomszédos cellák duális vertexeit (4-oldalú lapok az élek körül)
- A normálvektor / gradiens az input része, vagy numerikusai becsüljük
- Számos variánsa létezik

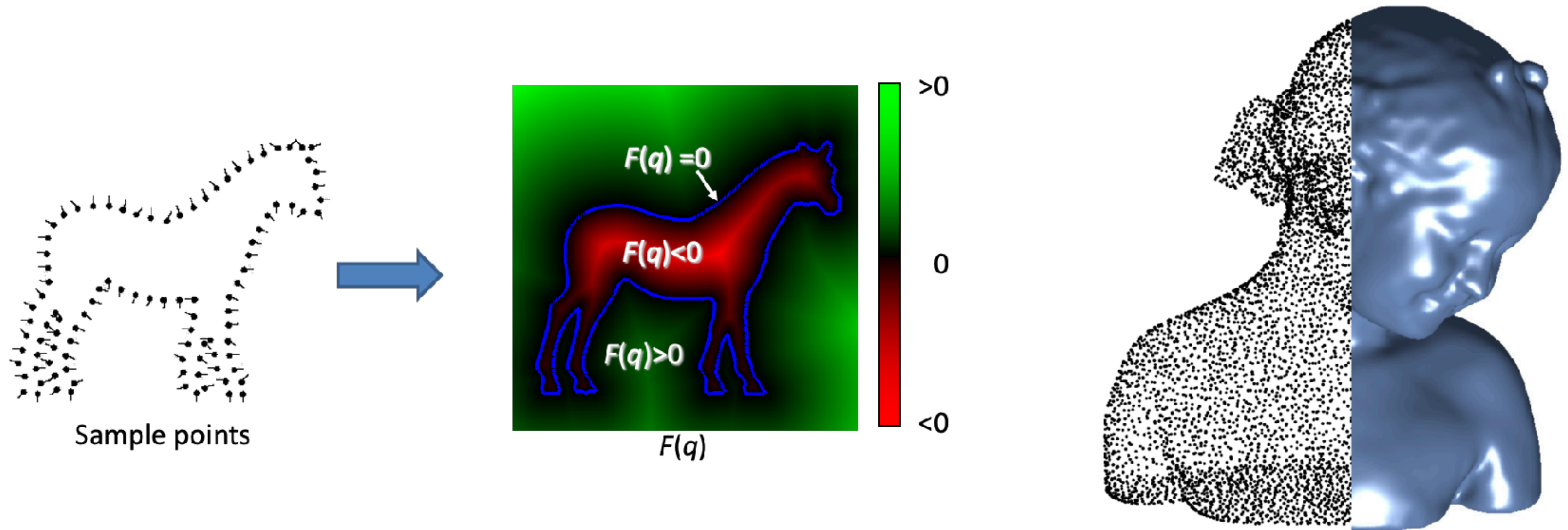


(a)

(b)

Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület



Cél: pontfelhőre illeszkedő implicit felület (indikátor/SDF függvény)

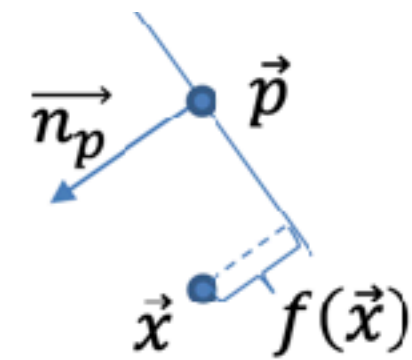
Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Lokális sík illesztés

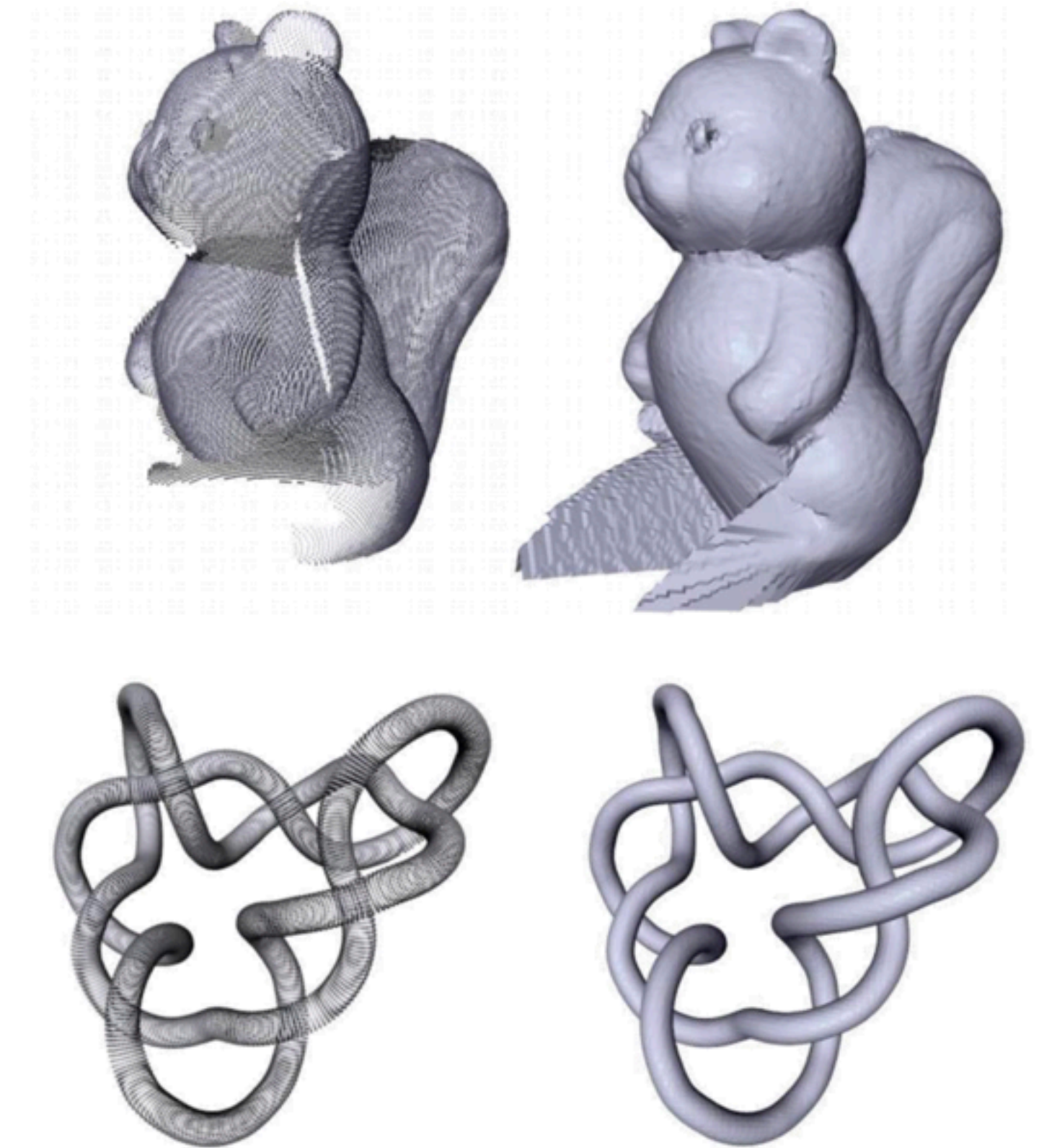
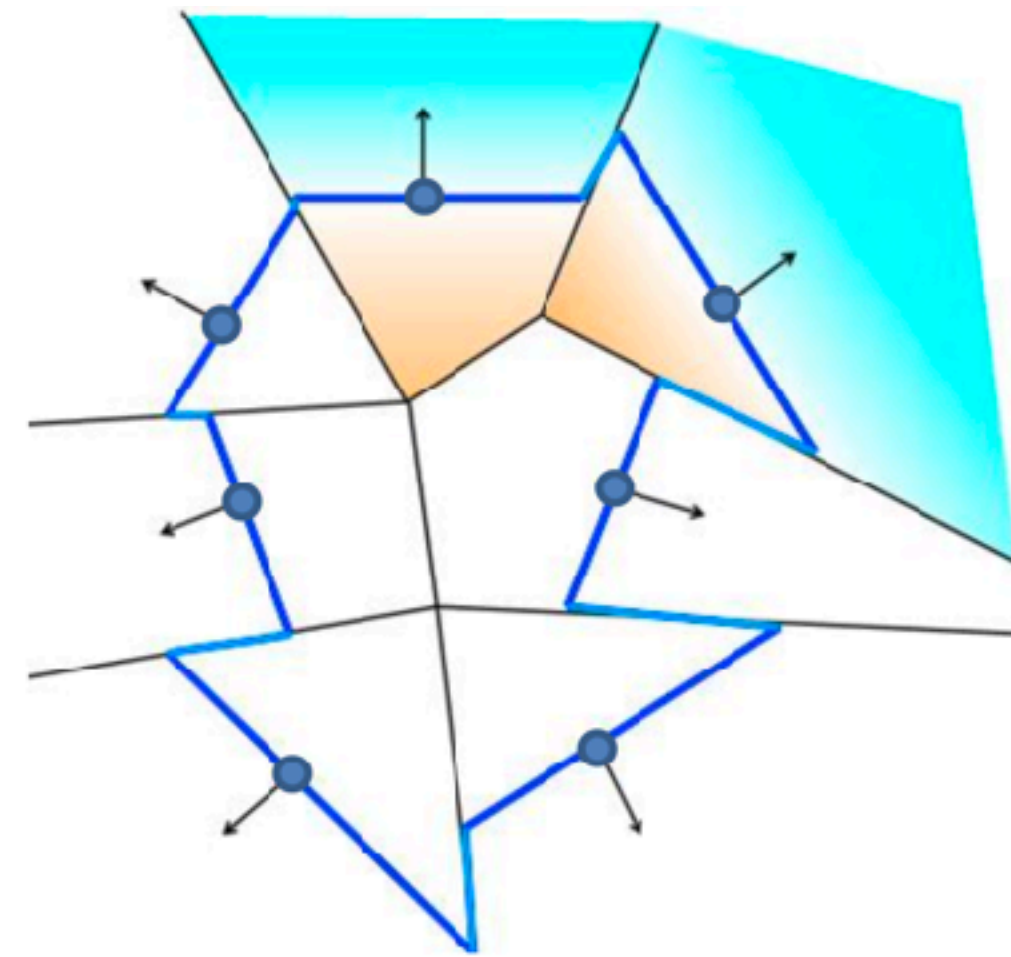
- A távolságot számítsuk a legközelebbi pont alapján:

$$f(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_p$$

\vec{p} is the closest point to \vec{x}



Szakaszosan folytonos függvény!
(Voronoi diagram)



[Hoppe'92] H.Hoppe et al., "Surface reconstruction from unorganized points" (SIGGRAPH 92)

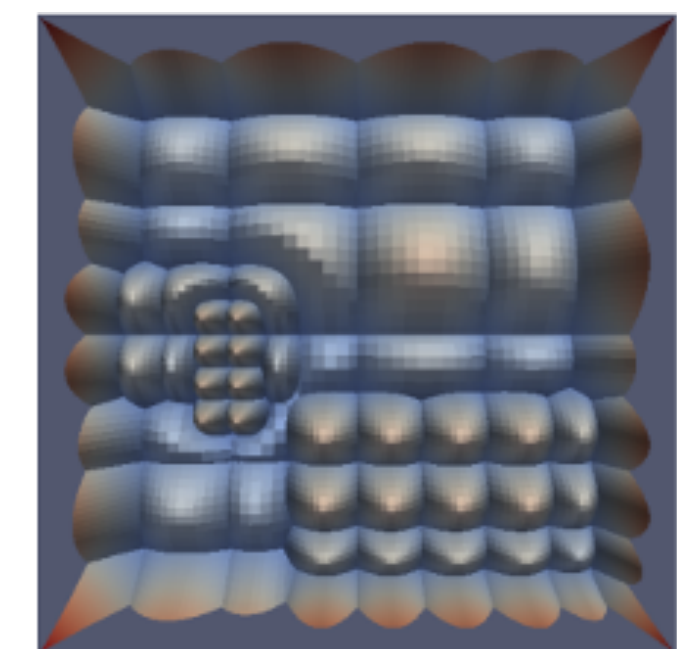
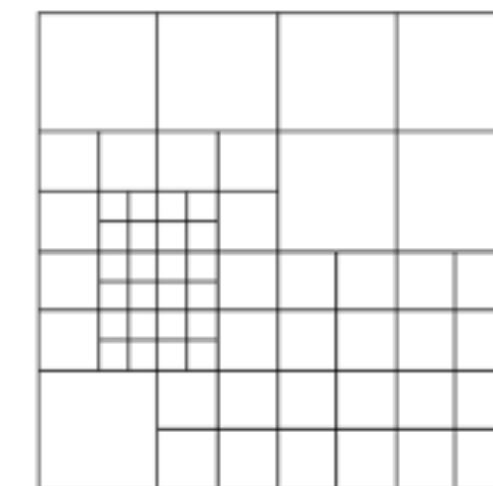
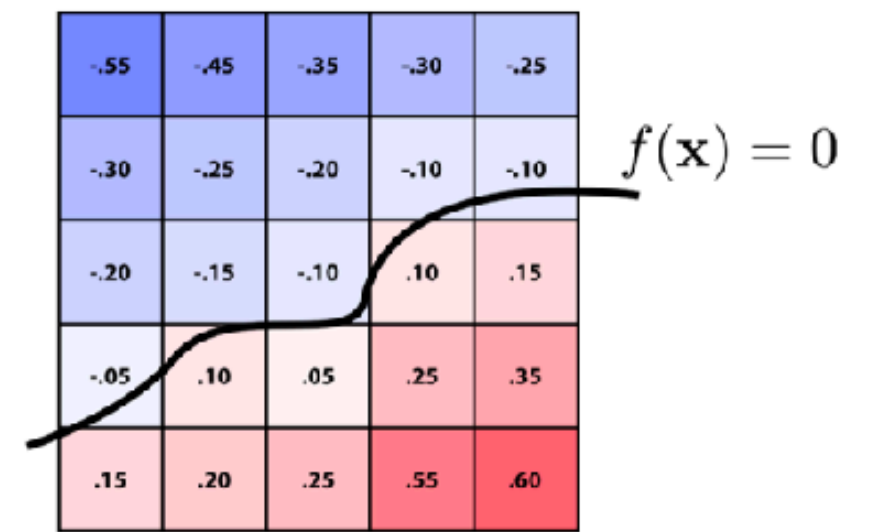
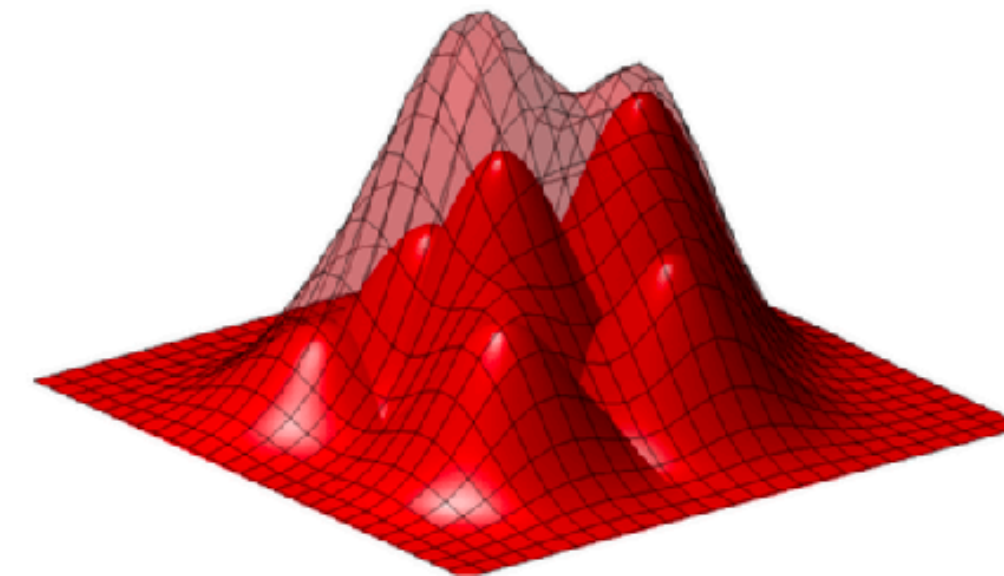
Source: M. Niessner

Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Függvény illesztés

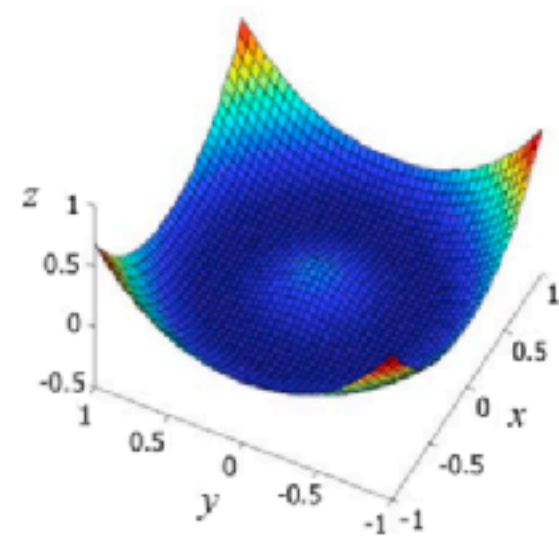
- Adottak: felületi pontok $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$, cél: implicit felület $F_\theta(\mathbf{p}_i) \approx 0$
 - Lehetnek további felületen kívüli pontok $F_\theta(\mathbf{p}_i) \approx f_i$
- Lehetnek továbbá normálvektorok $\mathbf{n}_i = (n_{x,i}, n_{y,i}, n_{z,i})$, melyekre $\nabla F_\theta(\mathbf{p}_i) \approx \mathbf{n}_i$
- Hagyományos megoldás: bázisfüggvények *lineáris* kombinációja

$$F_\theta(x, y, z) = \sum_k \theta_k \cdot b_k(x, y, z)$$
- Illeszkedési hiba: $L(\theta) = \sum_i w_{p,i} ||F_\theta(\mathbf{p}_i) - f_i|| + w_{n,i} ||\nabla F_\theta(\mathbf{p}_i) - \mathbf{n}_i||$
 - Másodfokú loss – Minimum feltétele lineáris egyenletrendszer θ_k -ra!
- Bázis választása:
 - Rács (szabályos vagy adaptív) + interpoláció (trilineáris vagy spline)
 - Radiális Bázis Függvények (RBF)

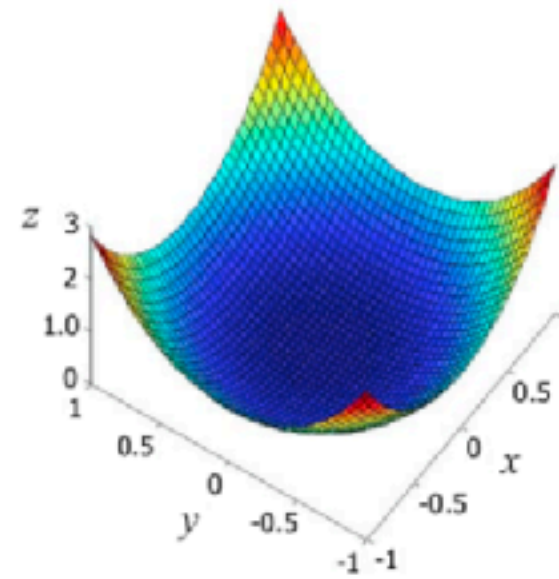


Konverzió Reprezentációk Között

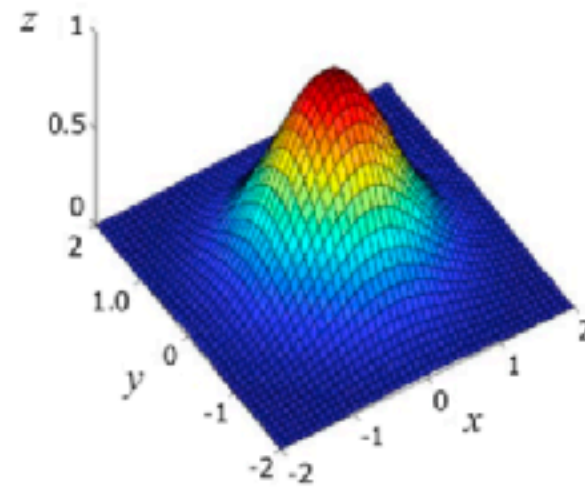
Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Függvény illesztés



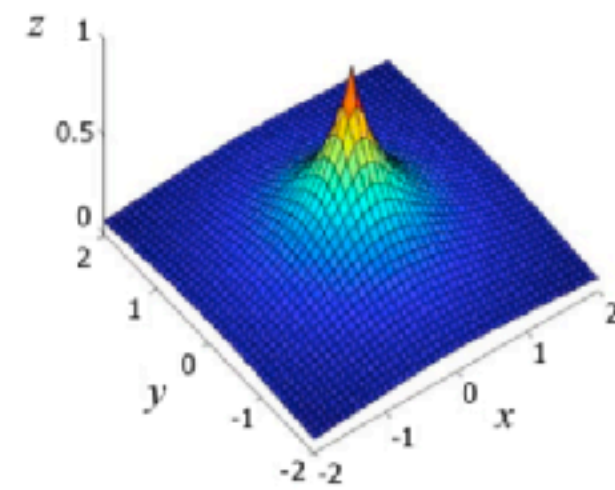
(a) Quadratic thin-plate $w(d) = d^2 \ln(d)$



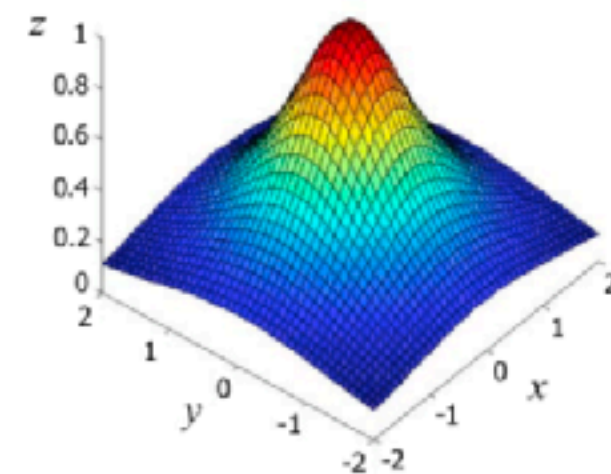
(b) Cubic thin-plate $w(d) = d^3$



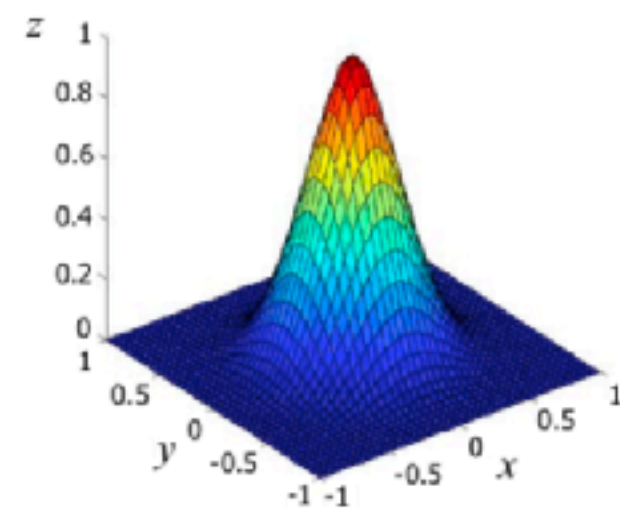
(c) Gaussian $w(d) = e^{-\left(\frac{d}{h}\right)^2}$



(d) McLain $w(d) = \frac{1}{(d+h)^2}$



(e) Inverse quadratic $w(d) = \frac{1}{d^2+h^2}$



(f) Wendland $w(d) = \left(1 - \frac{d}{h}\right)_+^4 \left(4\frac{d}{h} + 1\right)$

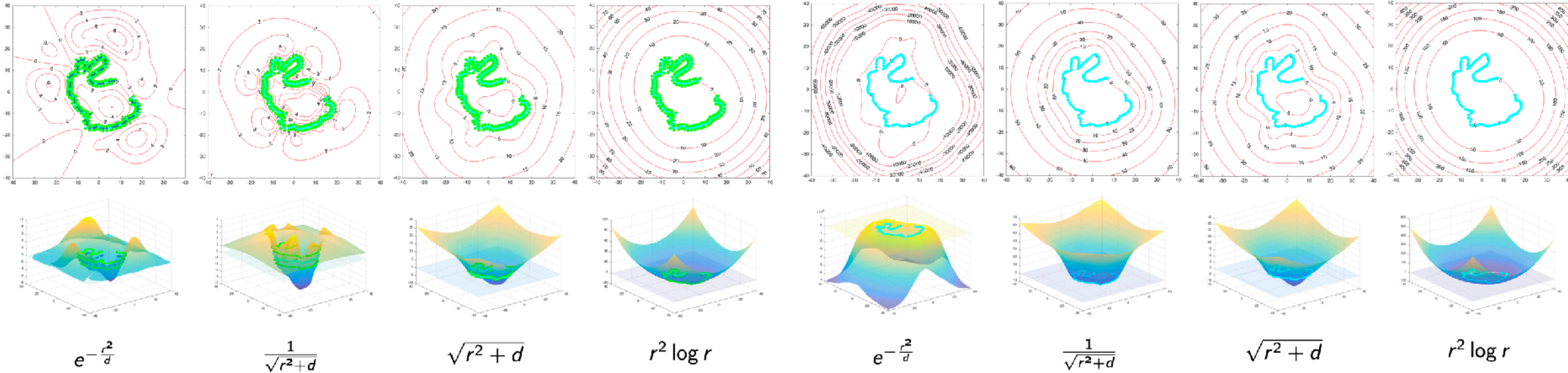
Tipikus radiális bázisfüggvények (RBF)



Gauss szórás hatása

Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Függvény illesztés



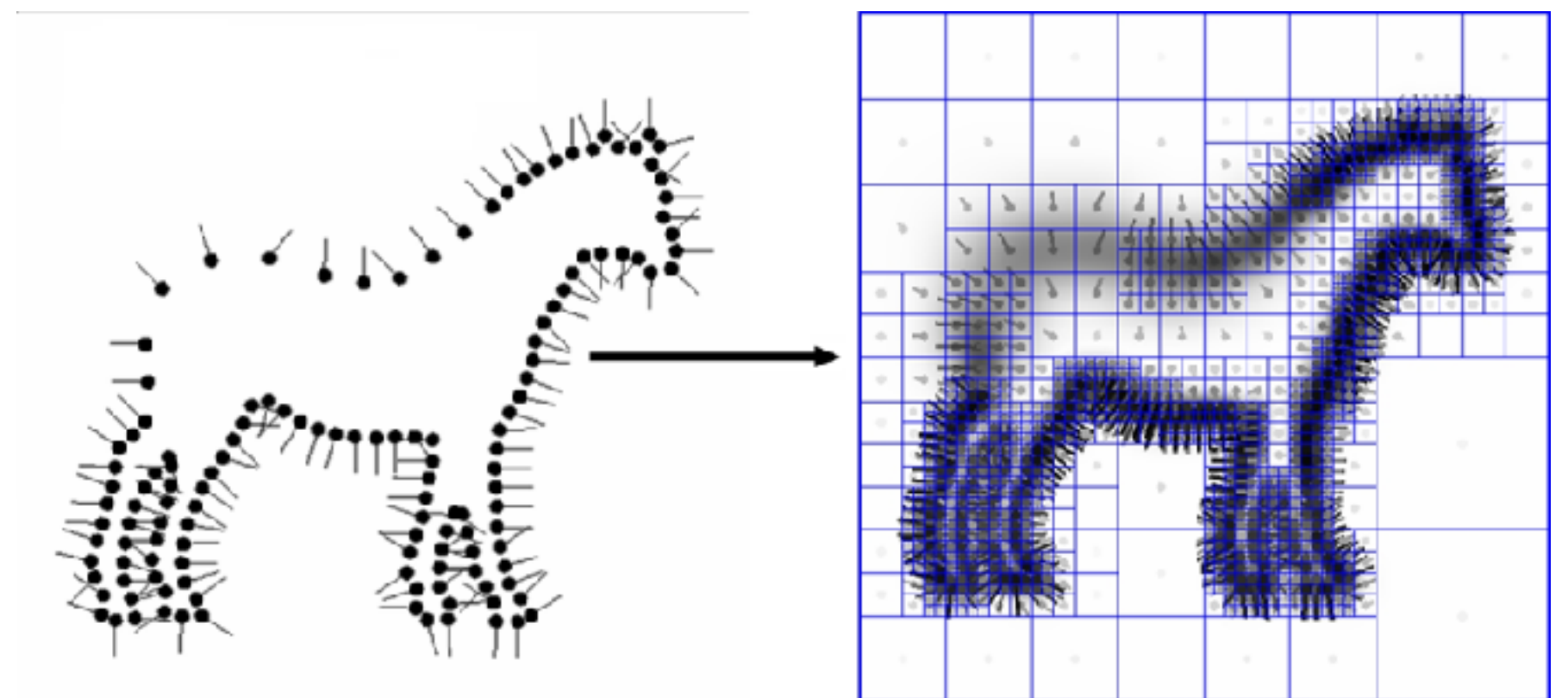
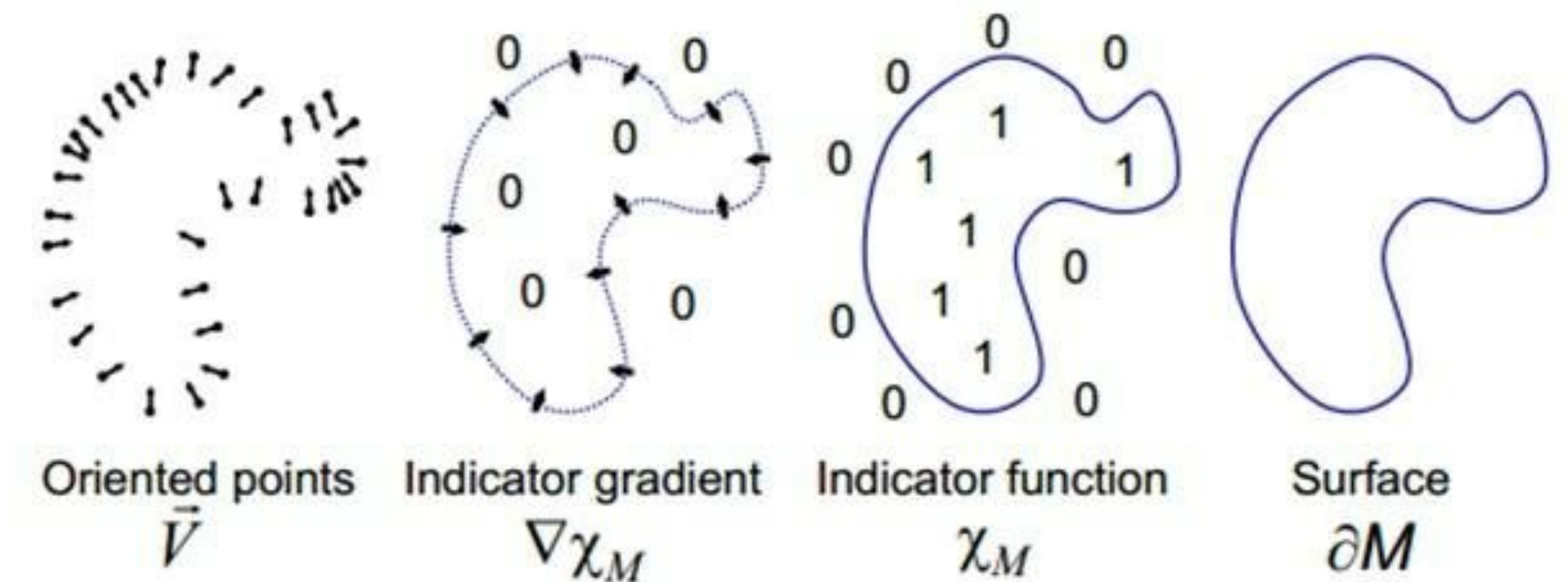
Augmentált pontokkal

Normálisokkal

Konverzió Reprezentációk Között

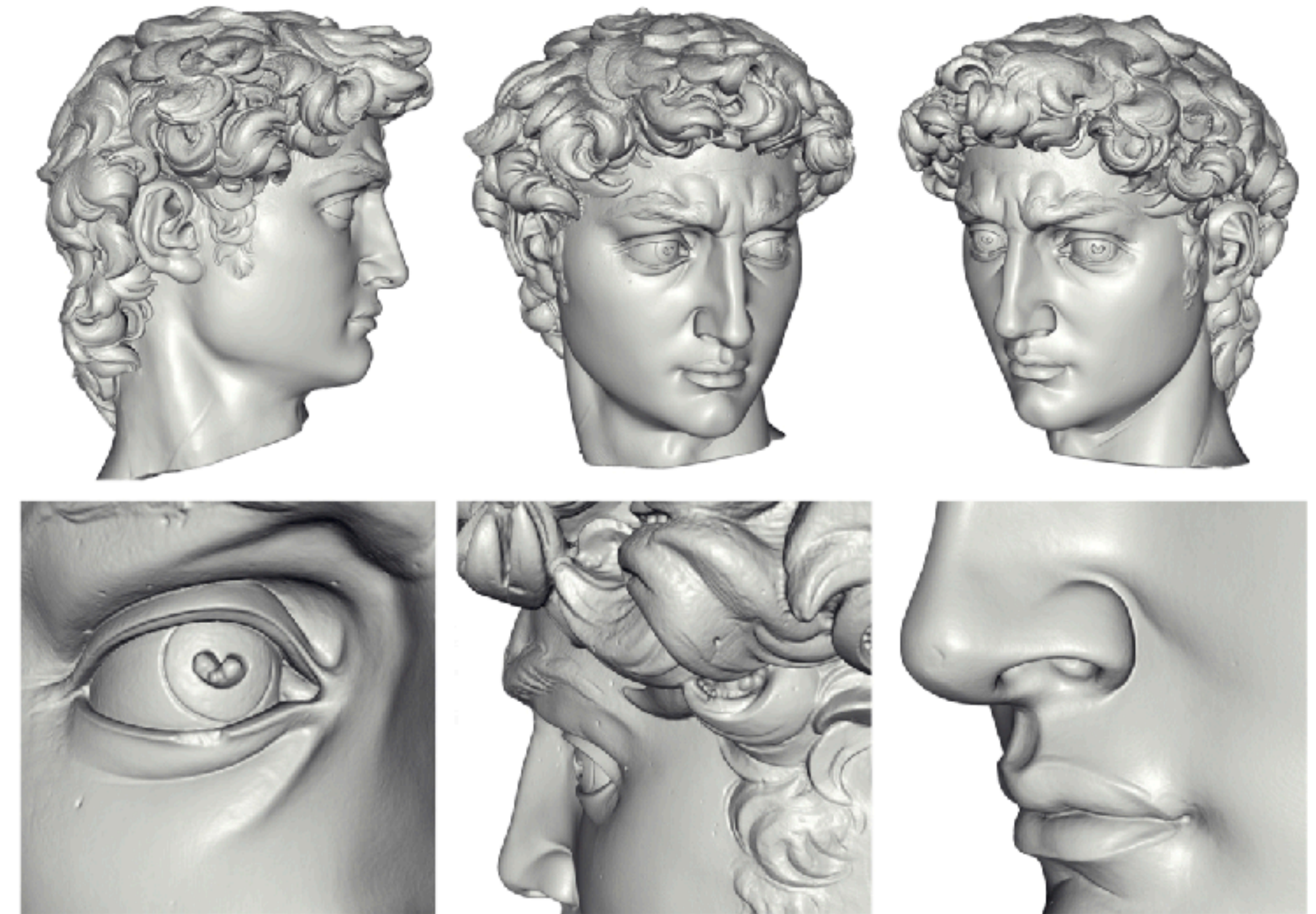
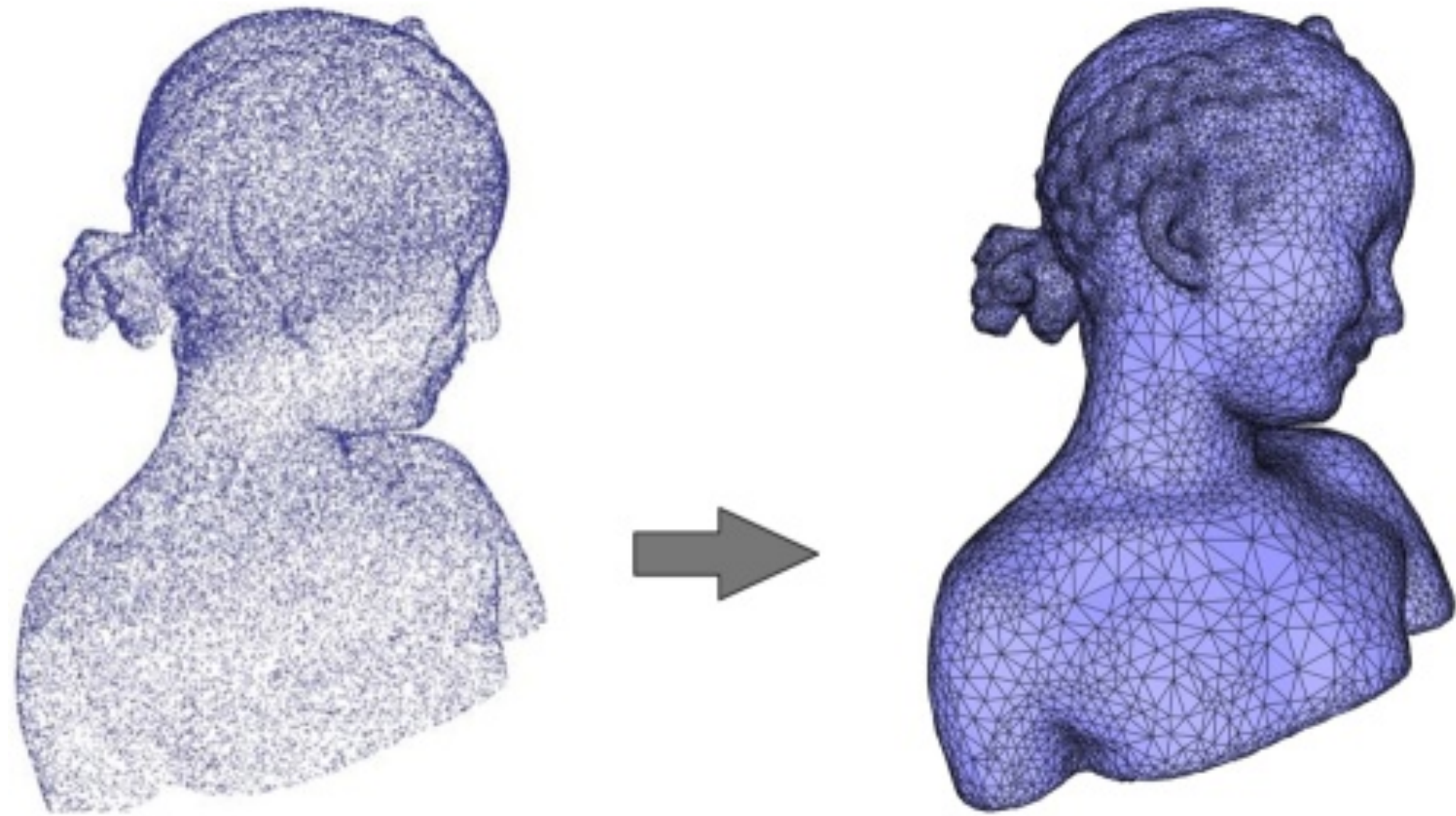
Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Poisson rekonstrukció

- Megfigyelés: indikátor függvény gradiense = felületi normálvektor
- **Poisson Rekonstrukció:** illesszünk indikátor függvényt a normálisokra
$$\min \|\nabla F - n\|^2 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla F = \nabla \cdot n \Rightarrow \Delta F = \nabla \cdot n$$
- Pontok illesztése: *Screened Poisson*
- Függvény reprezentáció: adaptív spline bázis a pontokhoz épített octree alapján
- Lineáris egyenletrendszer – hatékony megoldás “multigrid” módszerrel



Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Poisson rekonstrukció



<https://github.com/mkazhdan/PoissonRecon>

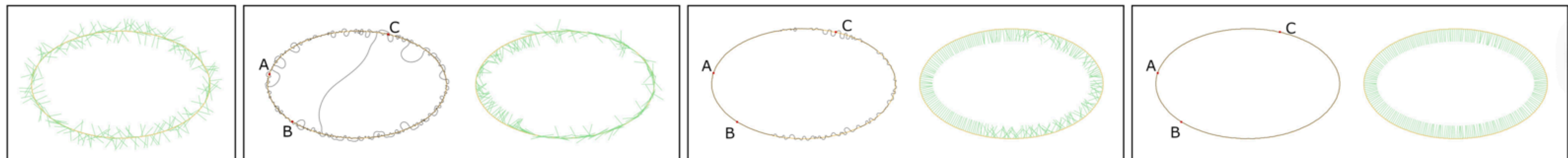
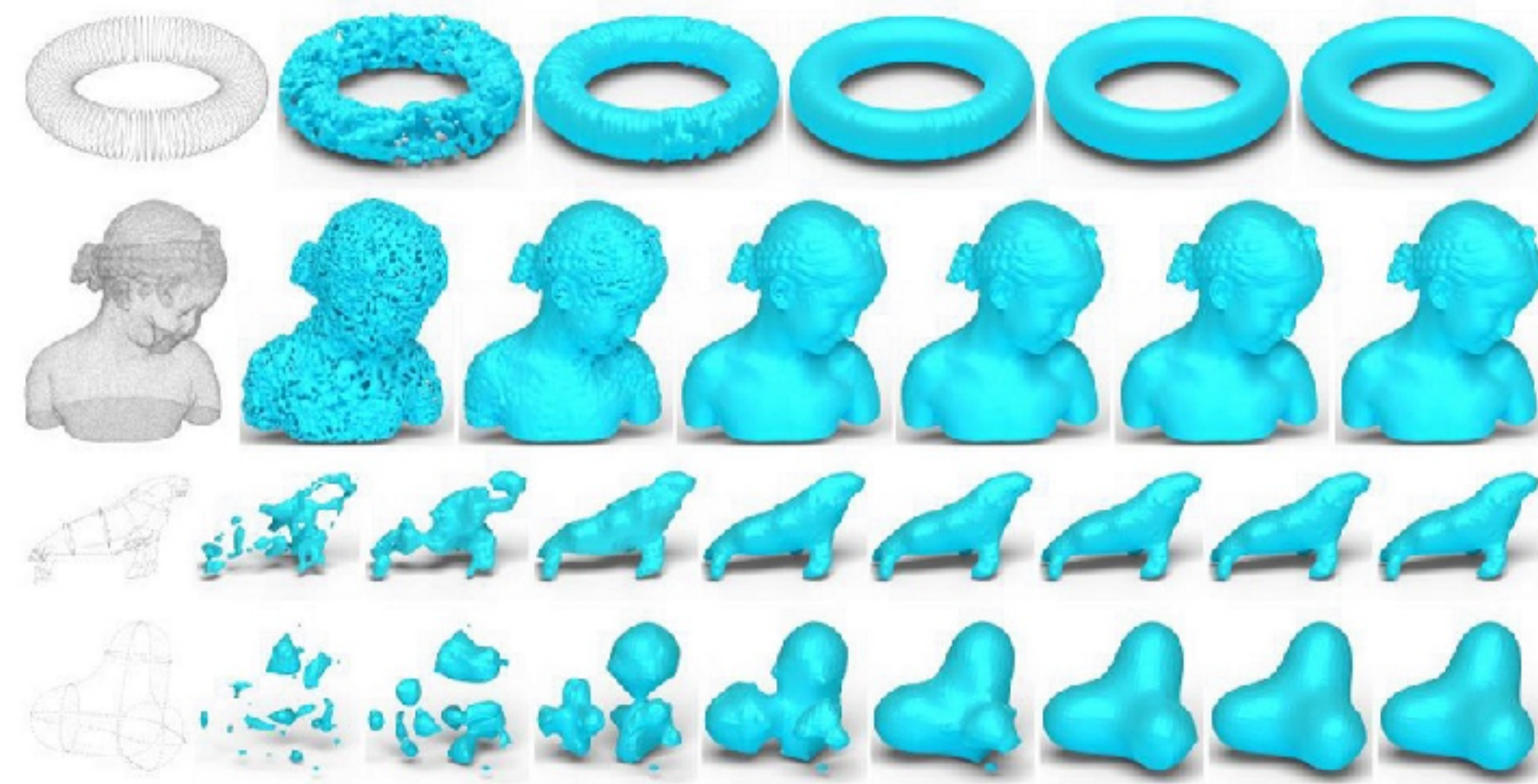
Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Iteratív Poisson

- Mit tegyünk, ha csak normálisok nélküli “nyers” pontjaink vannak?
- Iterative Poisson Surface Reconstruction (IPSR):
 1. Poisson rekonstrukció random normálvektorokkal
 2. Normálmező frissítése
 3. Iteráció

Iterative Poisson Surface Reconstruction (iPSR) for Unoriented Points

FEI HOU, CHYU WANG, and WENCHENG WANG, State Key Laboratory of Computer Science, Institute of Software, Chinese Academy of Sciences & University of Chinese Academy of Sciences, China
 HONG QIN, Department of Computer Science, Stony Brook University, USA
 CHEN QIAN, SenseTime Research & Tetras.AI, China
 YING HE*, School of Computer Science and Engineering & S-Lab, Nanyang Technological University, Singapore



Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Távolságmezők

- És ha indikátorfv. helyett **(előjeles) távolságmezőt** szeretnénk?

SSD: Smooth Signed Distance Surface Reconstruction

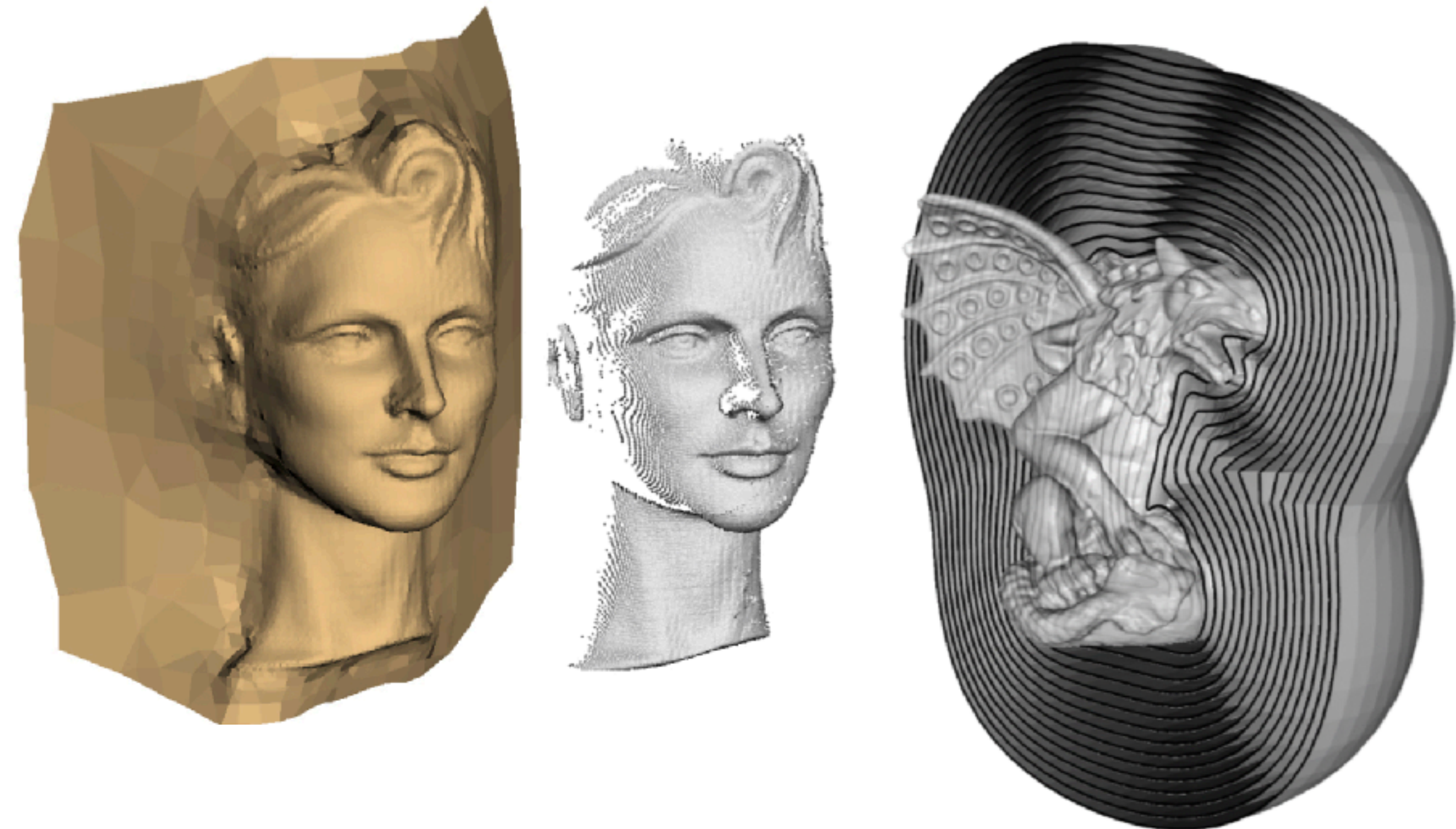
- Hesse mátrix regularizáció: $\mathcal{E}_R(f) = \frac{1}{|V|} \int_V \|Hf(x)\|^2 dx$

F. Calakli and G. Taubin

- Smoothed Signed Distance (SSD)

- Nagyobb számításigény (integrált kell számítani)

- Alternatíva: $(|\nabla F| - 1)^2$ (“**Eikonal loss**”) – Nemlineáris, iteratív optimalizáció szükséges!



Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Neurális implicit reprezentációk

Klasszikus implicit rekonstrukció

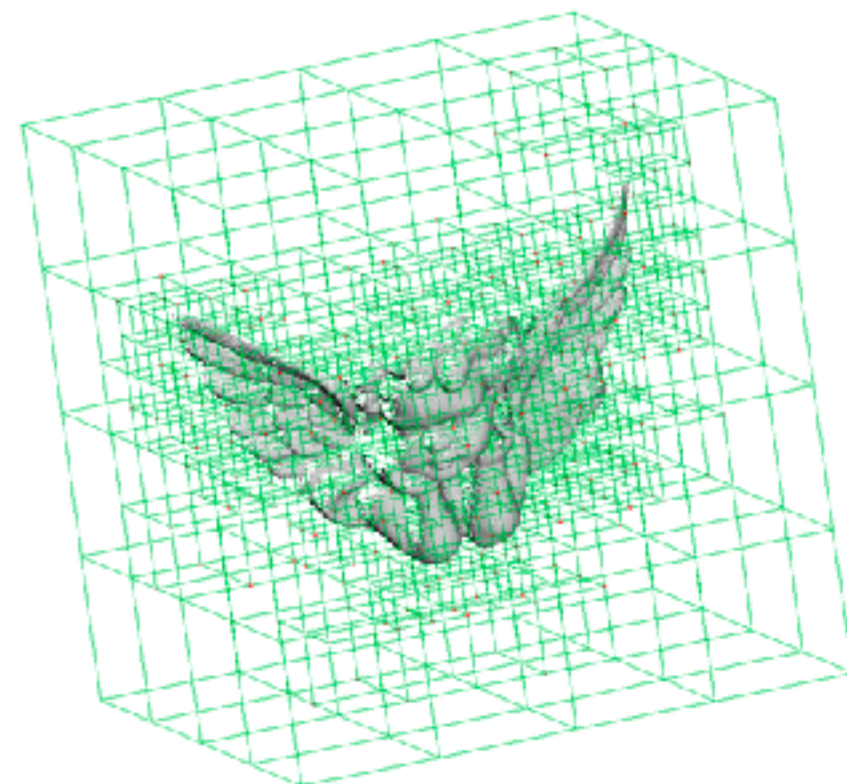
Lineáris függvénytér (RBF, spline)

Kvadratikus hiba + regularizáció

Lineáris egyenletrendszer

Ritka mátrixok

CPU



Modern implicit rekonstrukció

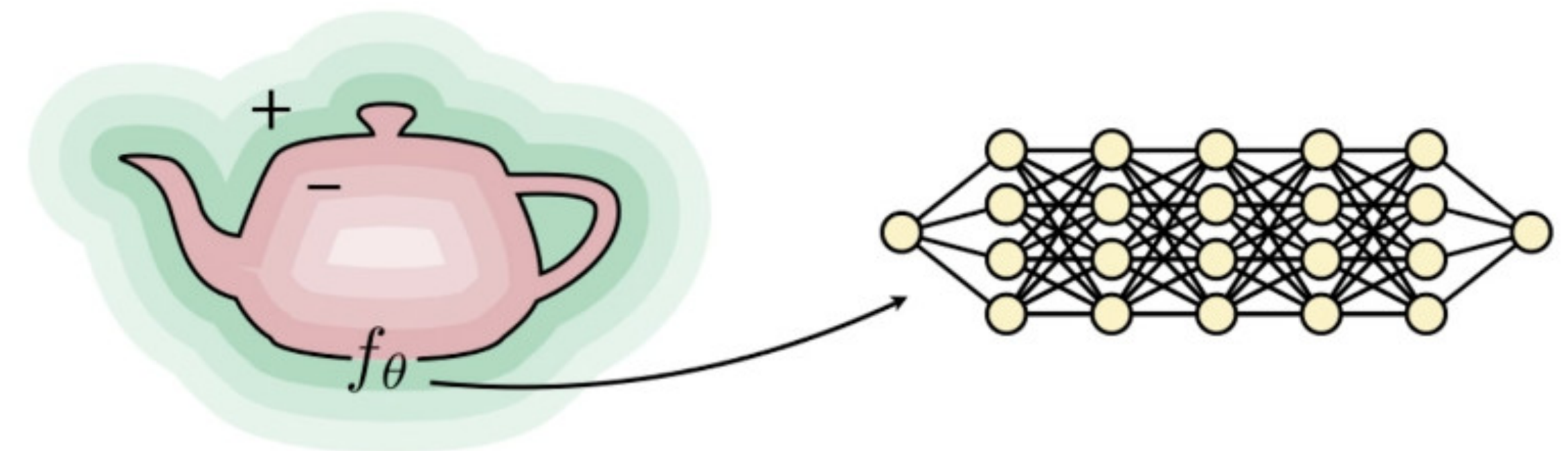
Függvénytér nemlineáris lehet (pl. MLP)

Loss általános lehet (L1, eikonál, etc.)

Iteratív optimalizáció ((S)GD/ADAM)

Sűrű mátrixok

GPU



(Ld. következő előadás)

Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Körüljárási szám

- **Körüljárási szám (winding number):** hányszor “vesz körbe” egy alakzat egy adott pontot

- Indikátorfv. általánosítása
- Számos interpretációja ismert: [LINK](#)

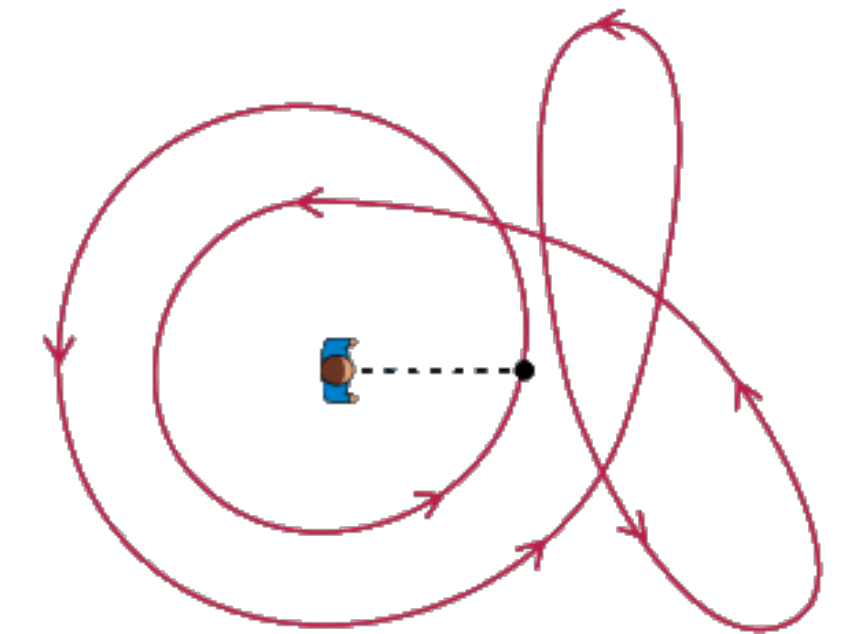
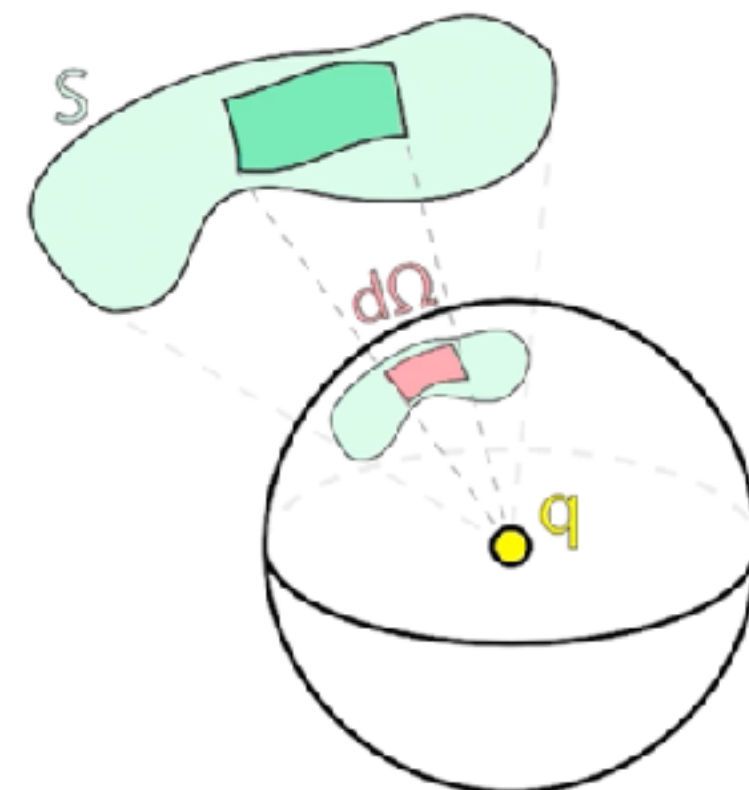
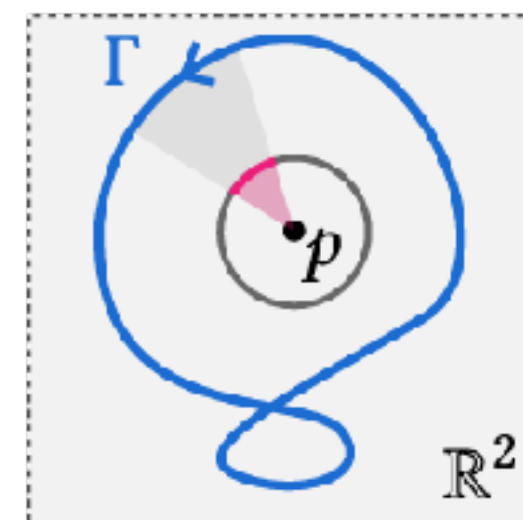
- Integrál alak:

- 2D – előjeles szög

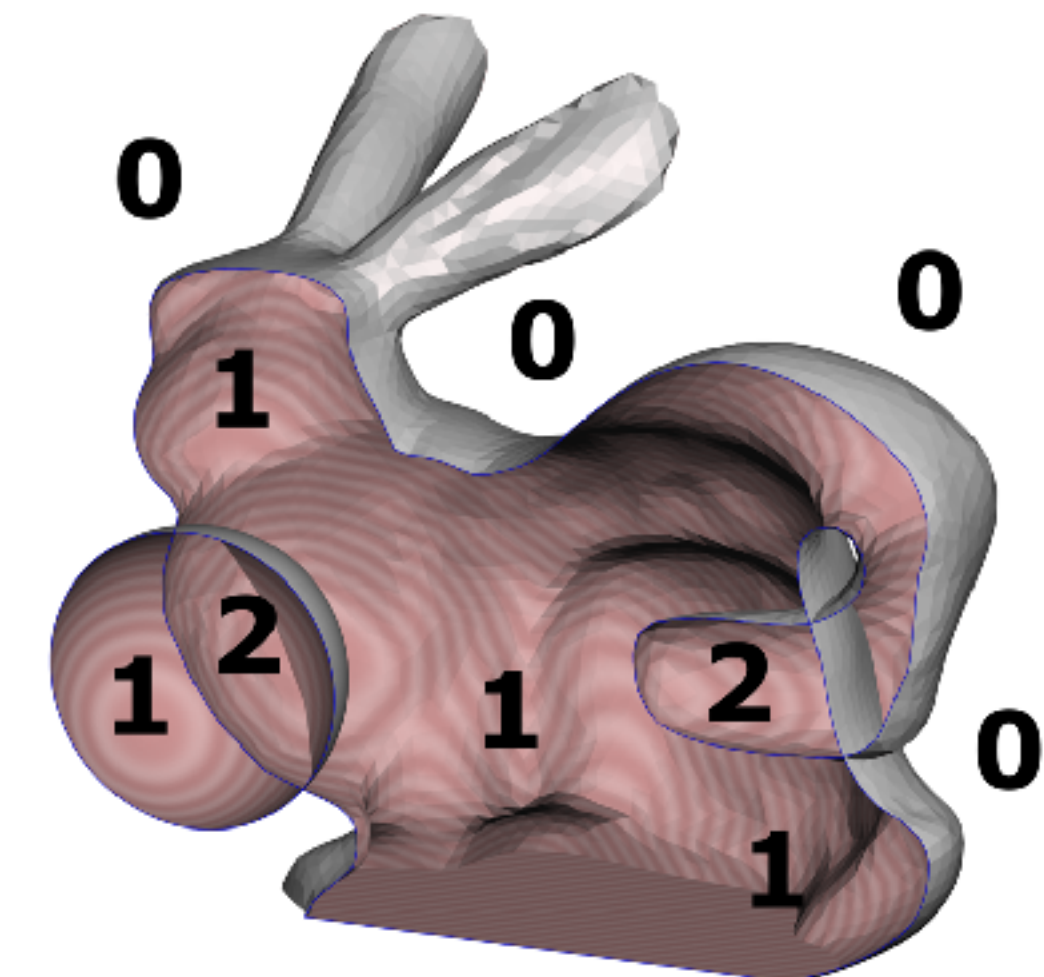
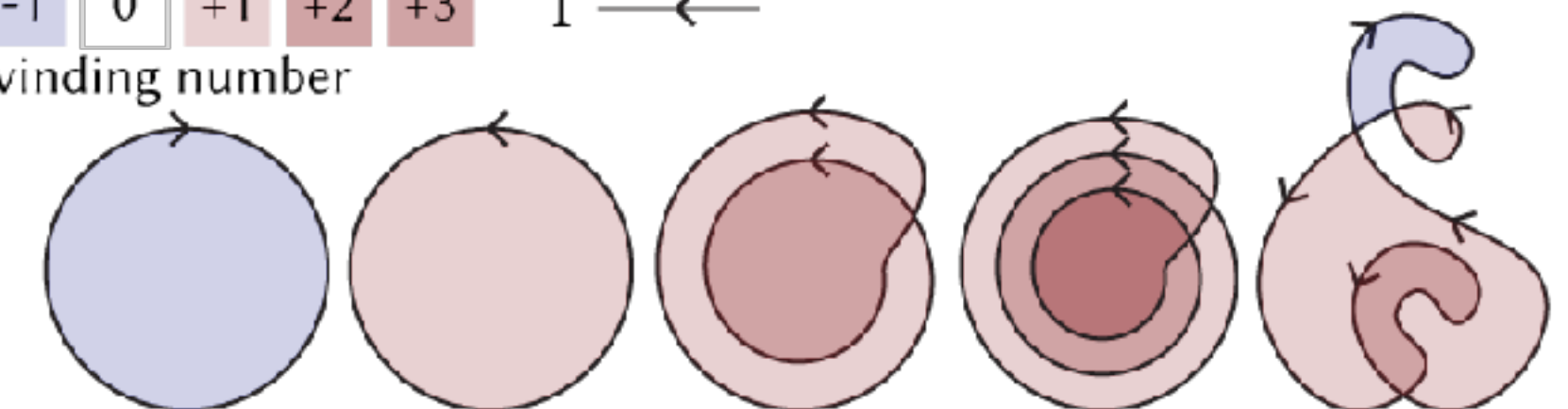
$$w(q) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\theta$$

- 3D – térszög

$$w_S(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_S d\Omega$$



-1 0 +1 +2 +3 winding number $\Gamma \leftarrow$



Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Körüljárási szám

- **Körüljárási szám (winding number):** hányszor “vesz körbe” egy alakzat egy adott pontot

- Indikátorfv. általánosítása
- Számos interpretációja ismert: [LINK](#)

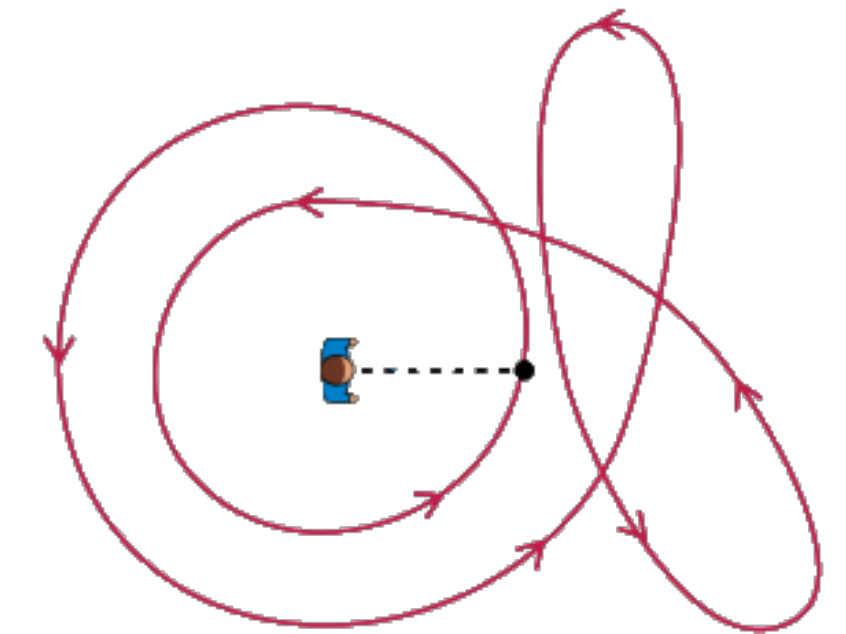
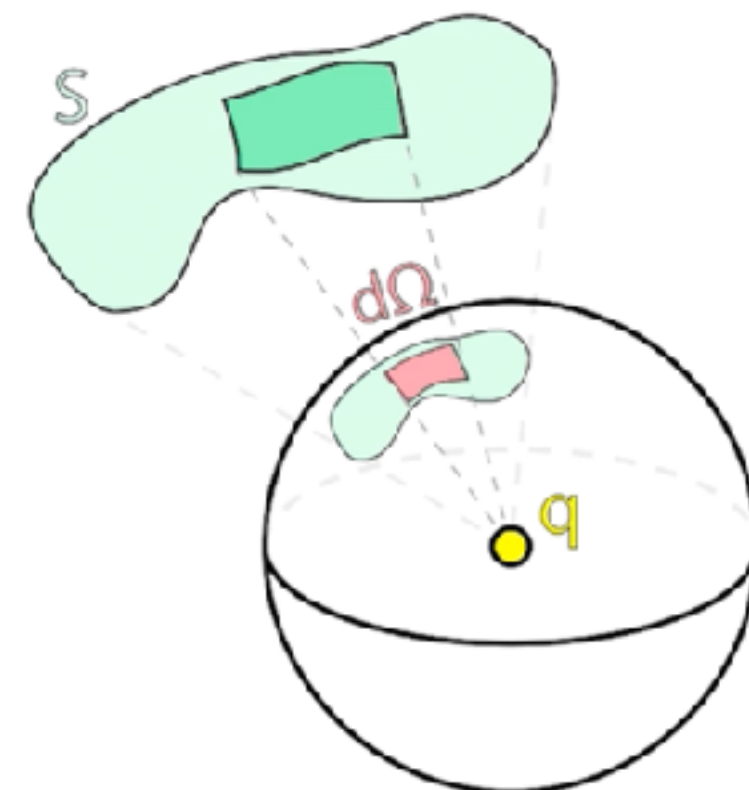
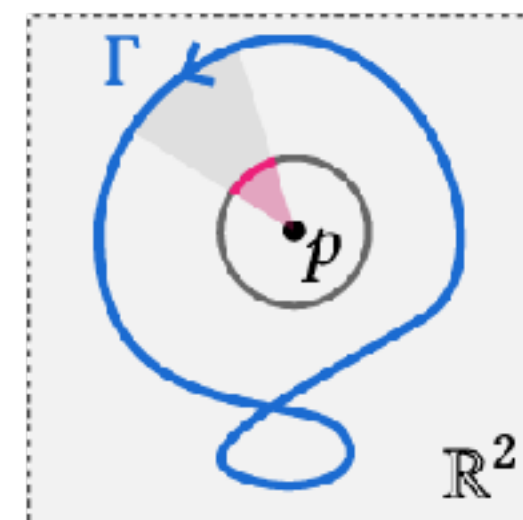
- Integrál alak:

- 2D – előjeles szög

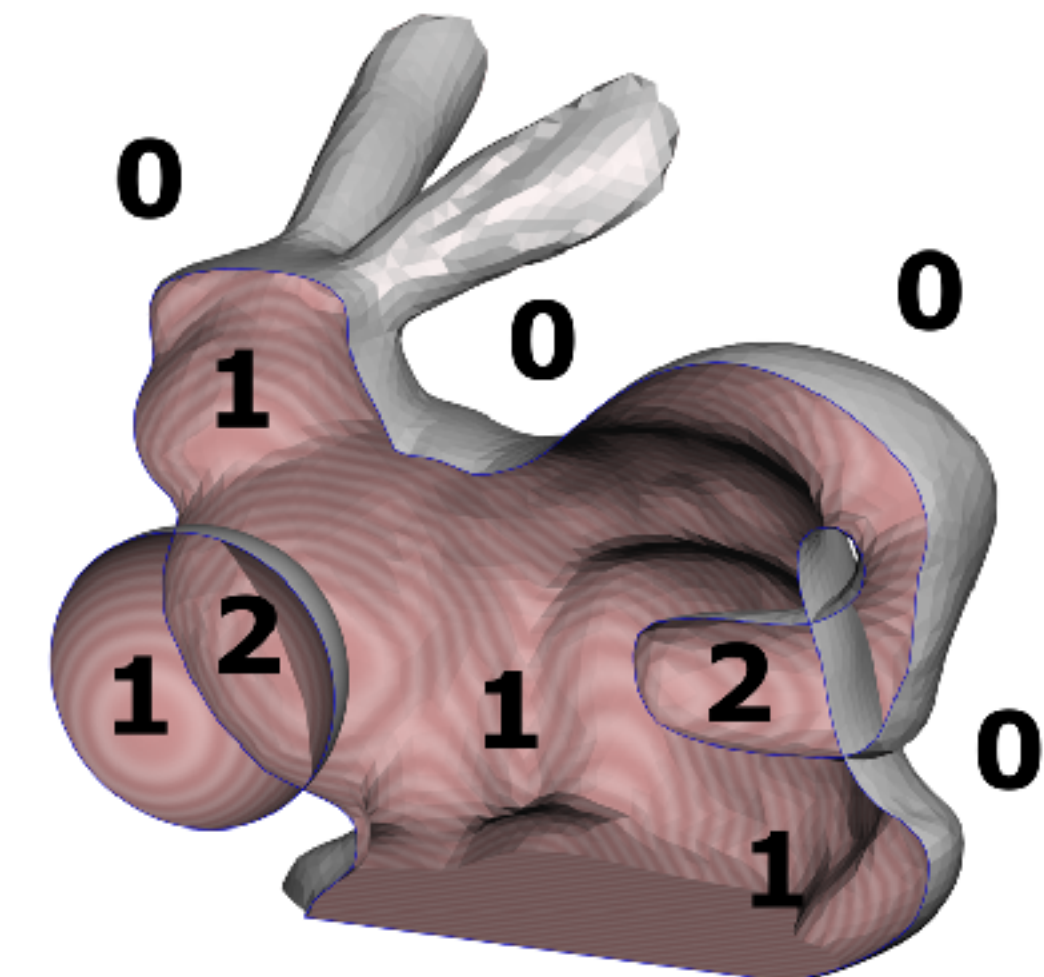
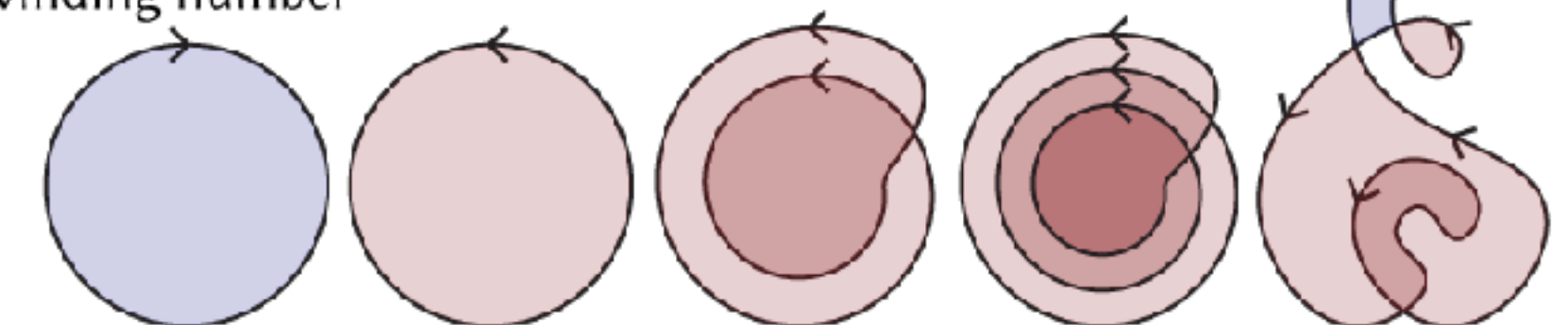
$$w(q) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\theta$$

- 3D – térszög

$$w_S(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_S d\Omega$$

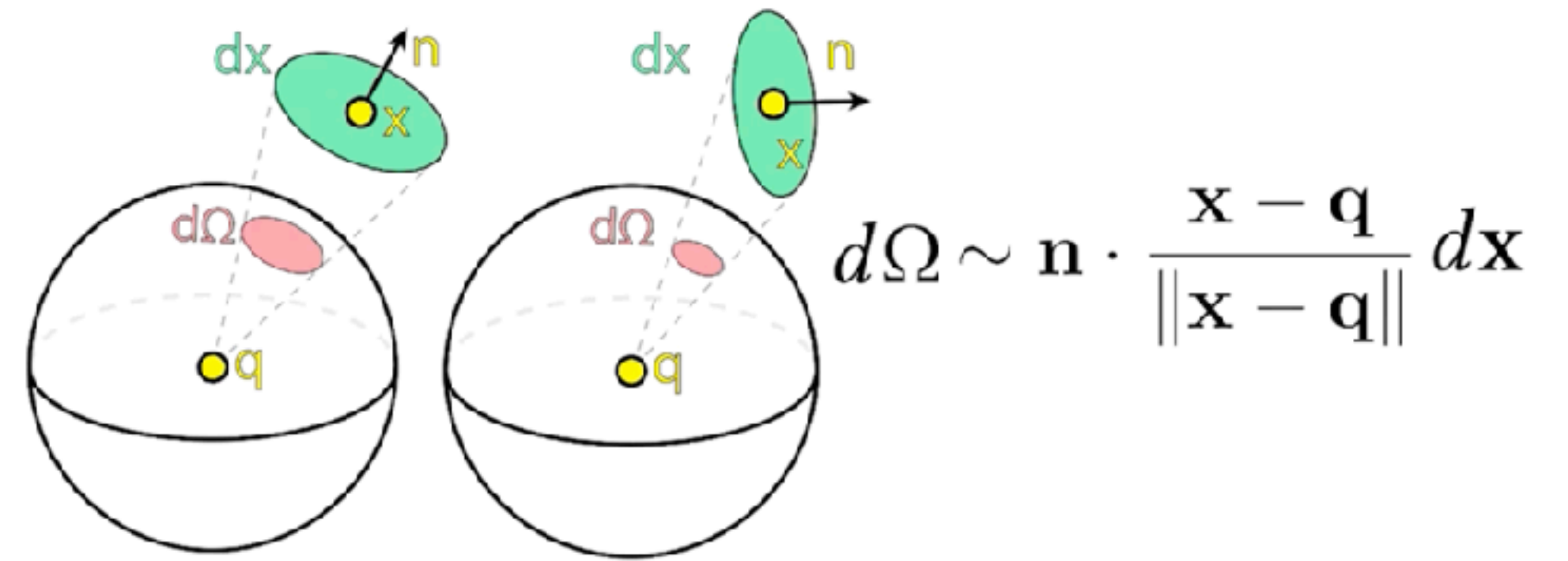
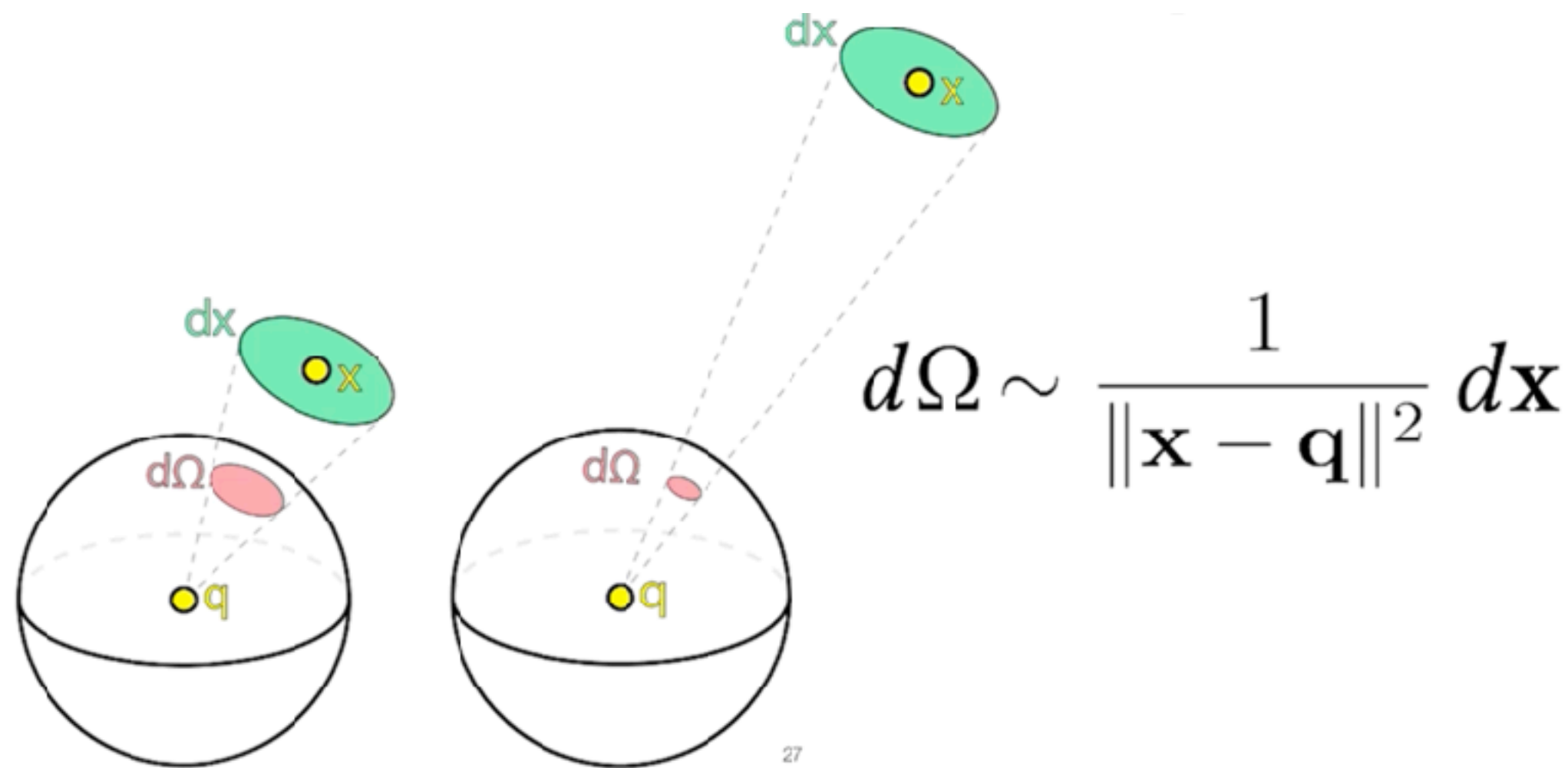


-1 0 +1 +2 +3 winding number $\Gamma \leftarrow$



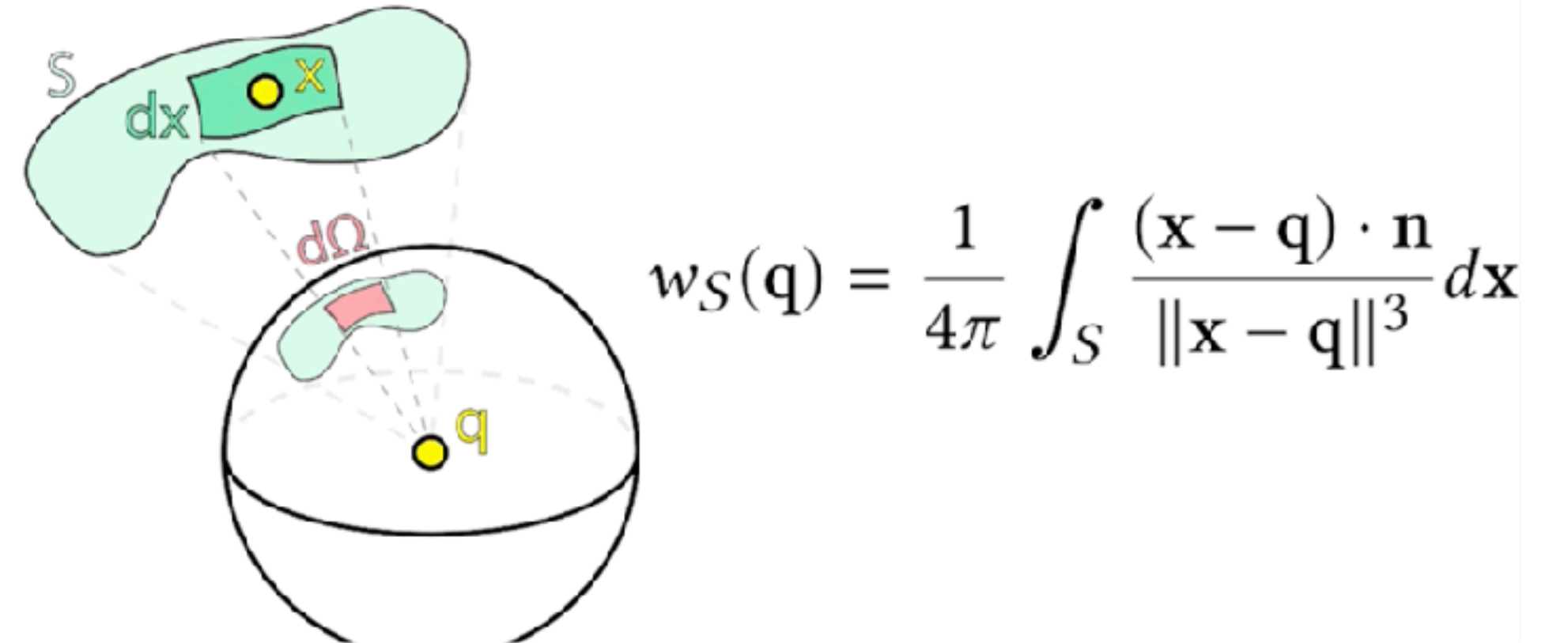
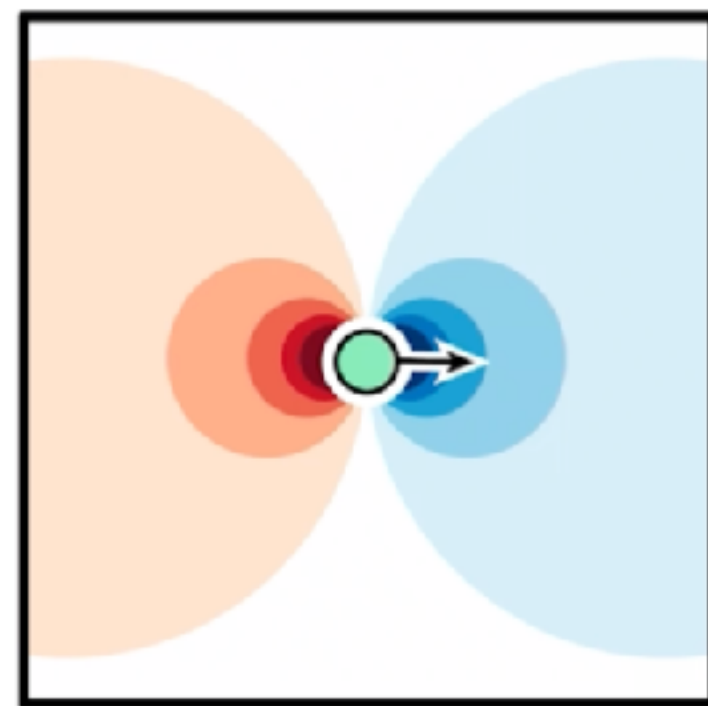
Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Körüljárási szám



$$d\Omega = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|^3} d\mathbf{x}$$

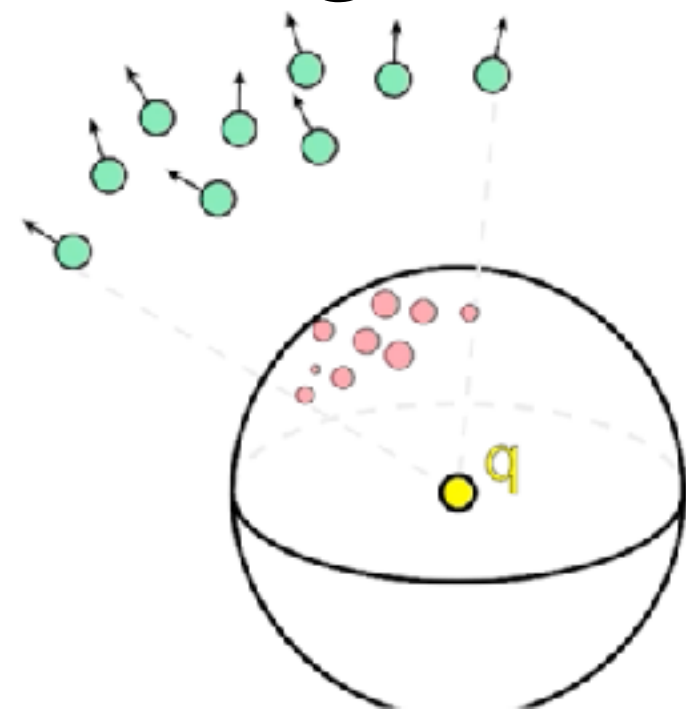
“dipólus”



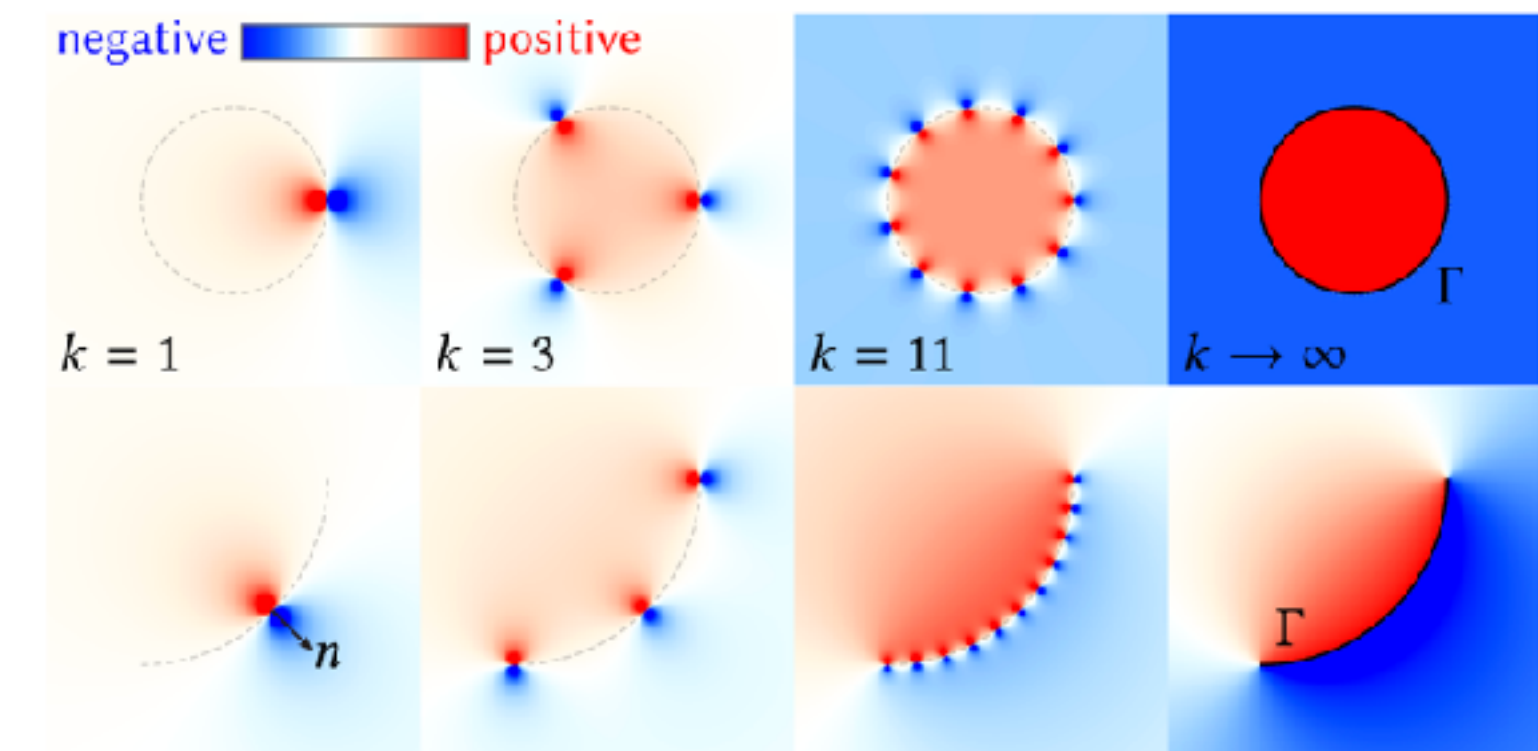
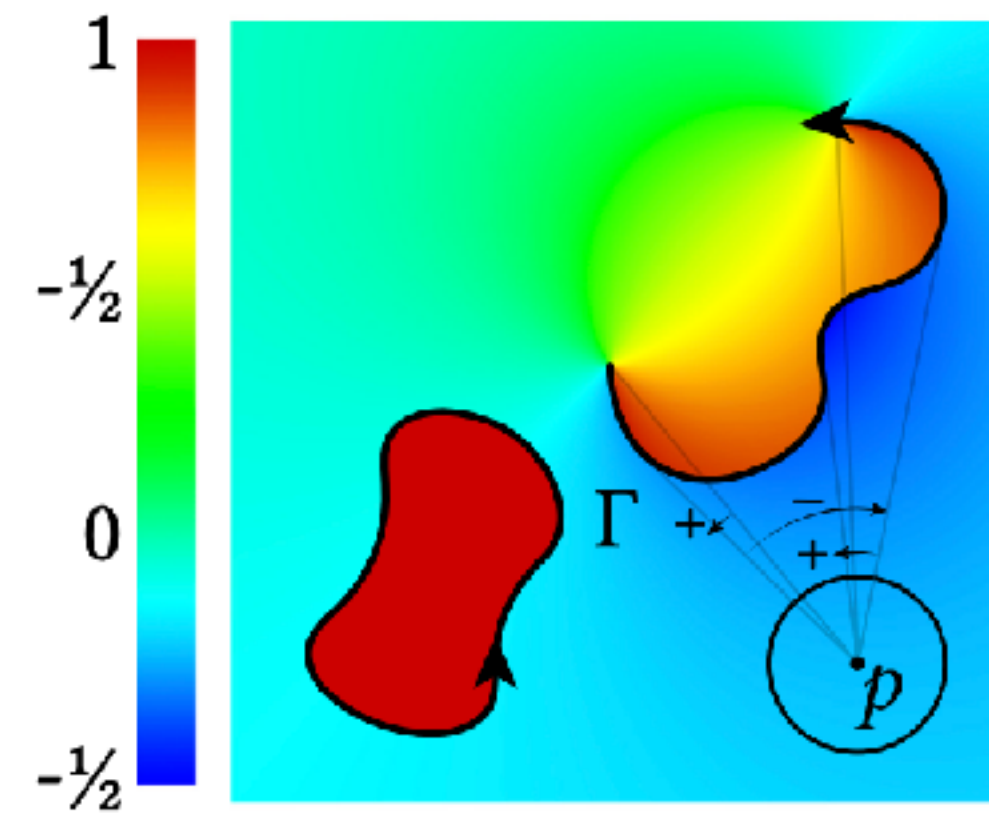
Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Körüljárási szám

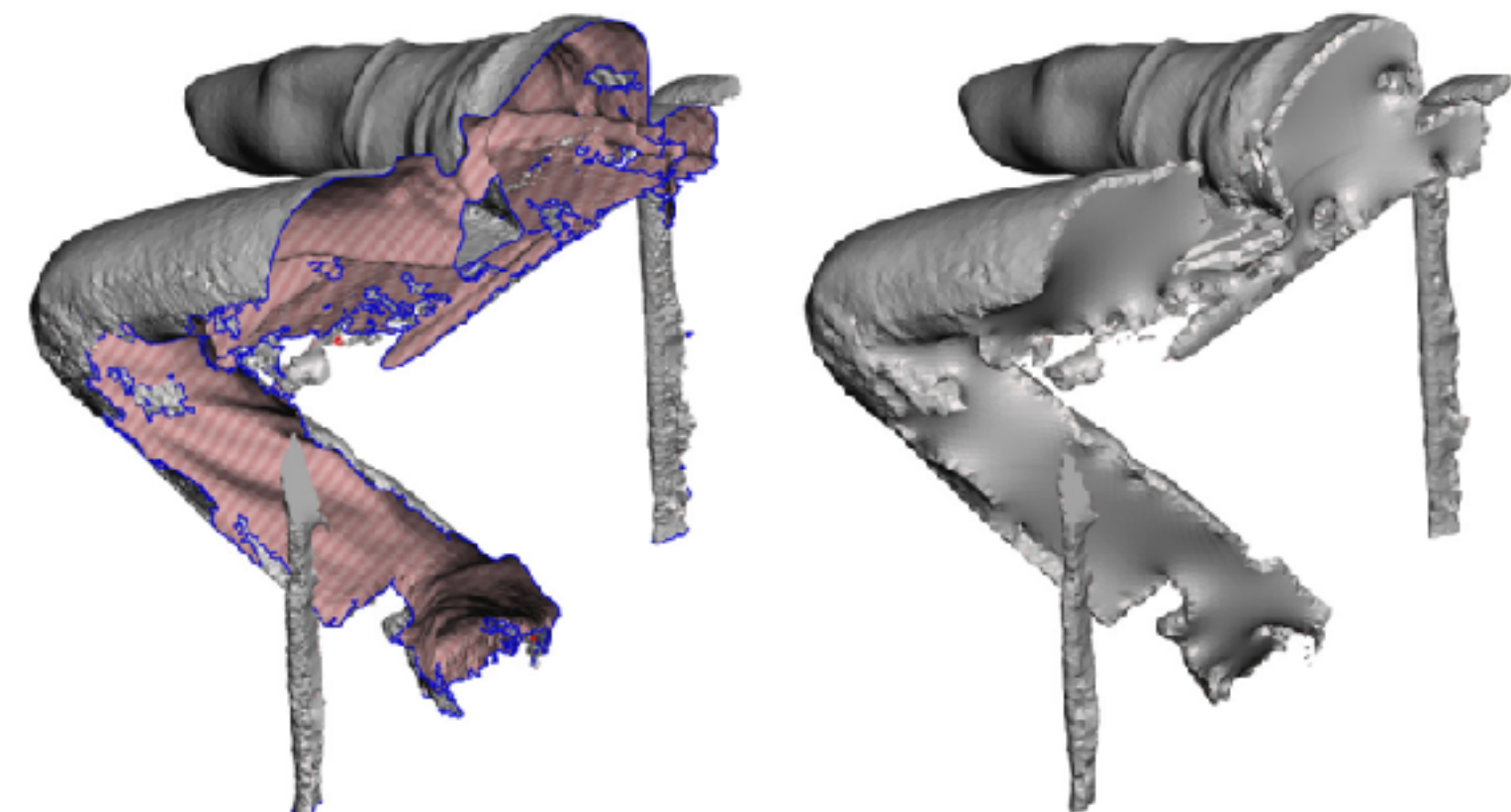
- Az integrális alak általánosítható pl. pontfelhőkre is – Generalized Winding Number



$$w_S(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i^n a_i \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}\|^3}$$

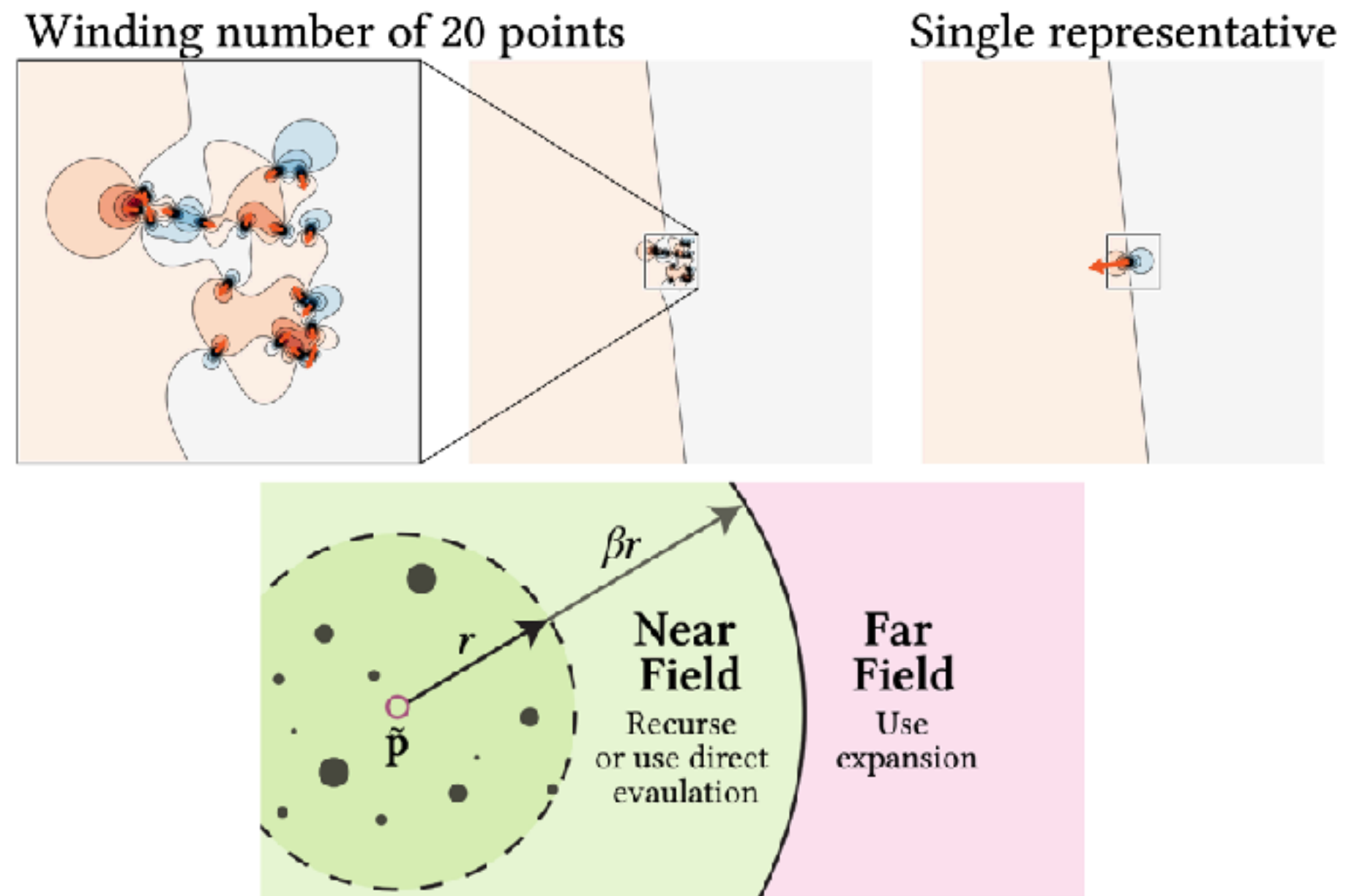


- $w(q) = 0.5$ szintfelület – zárt felület!
- Poisson rekonstrukció egy formája

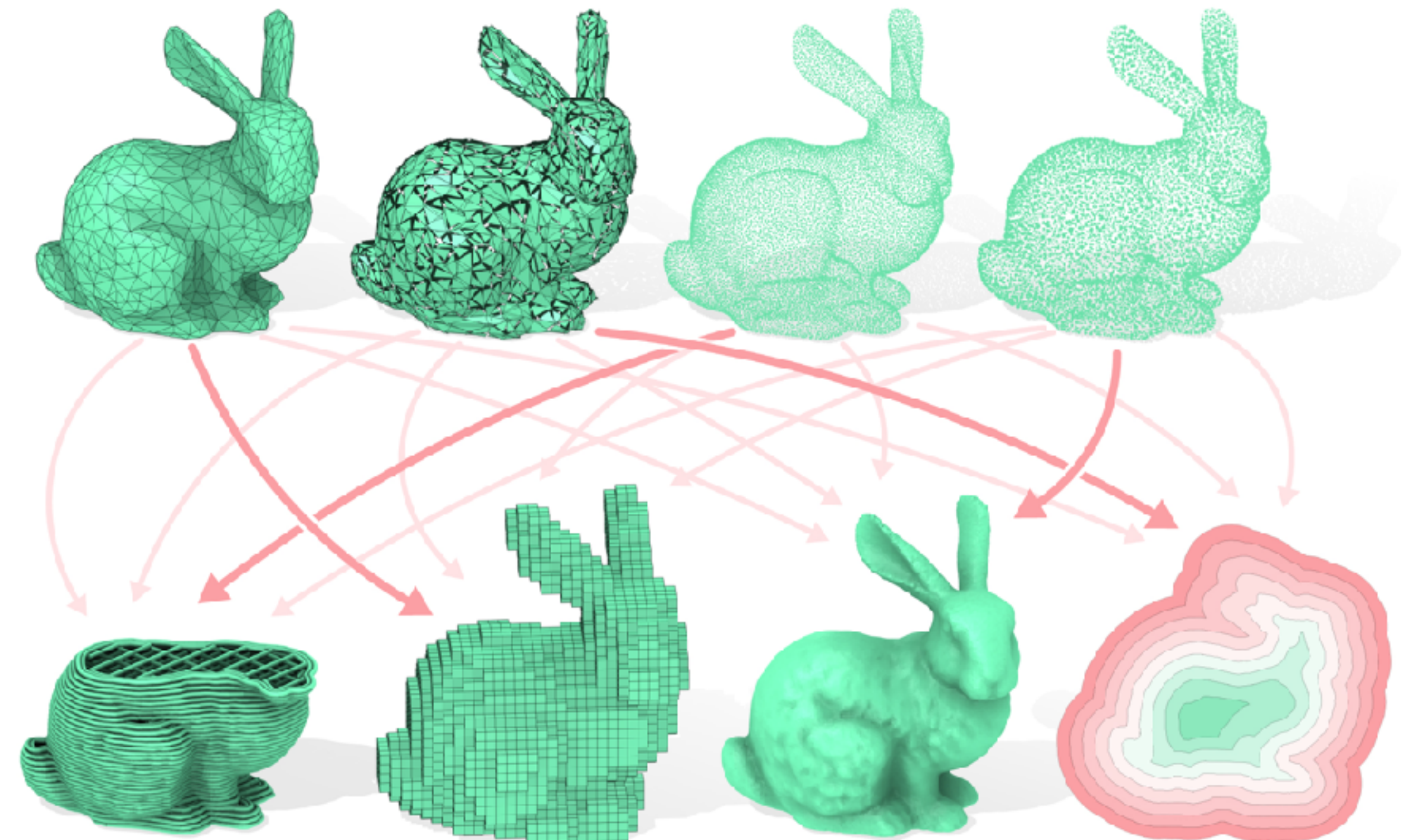


Konverzió Reprezentációk Között

Pontfelhő \Rightarrow Implicit felület – Körüljárási szám



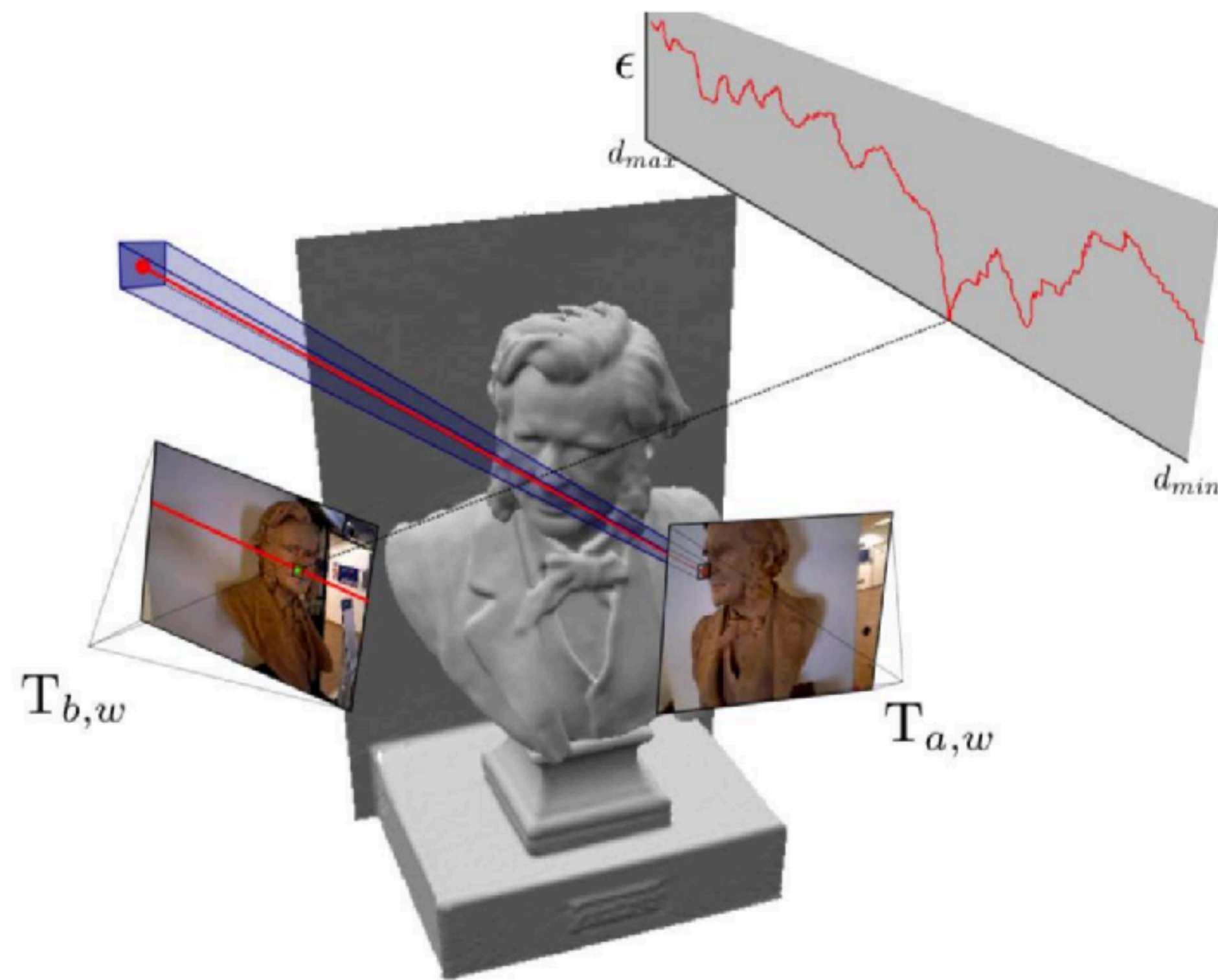
Gyorsítás “multipólus” kifejtéssel



<https://www.dgp.toronto.edu/projects/fast-winding-numbers/>

Konverzió Reprezentációk Között

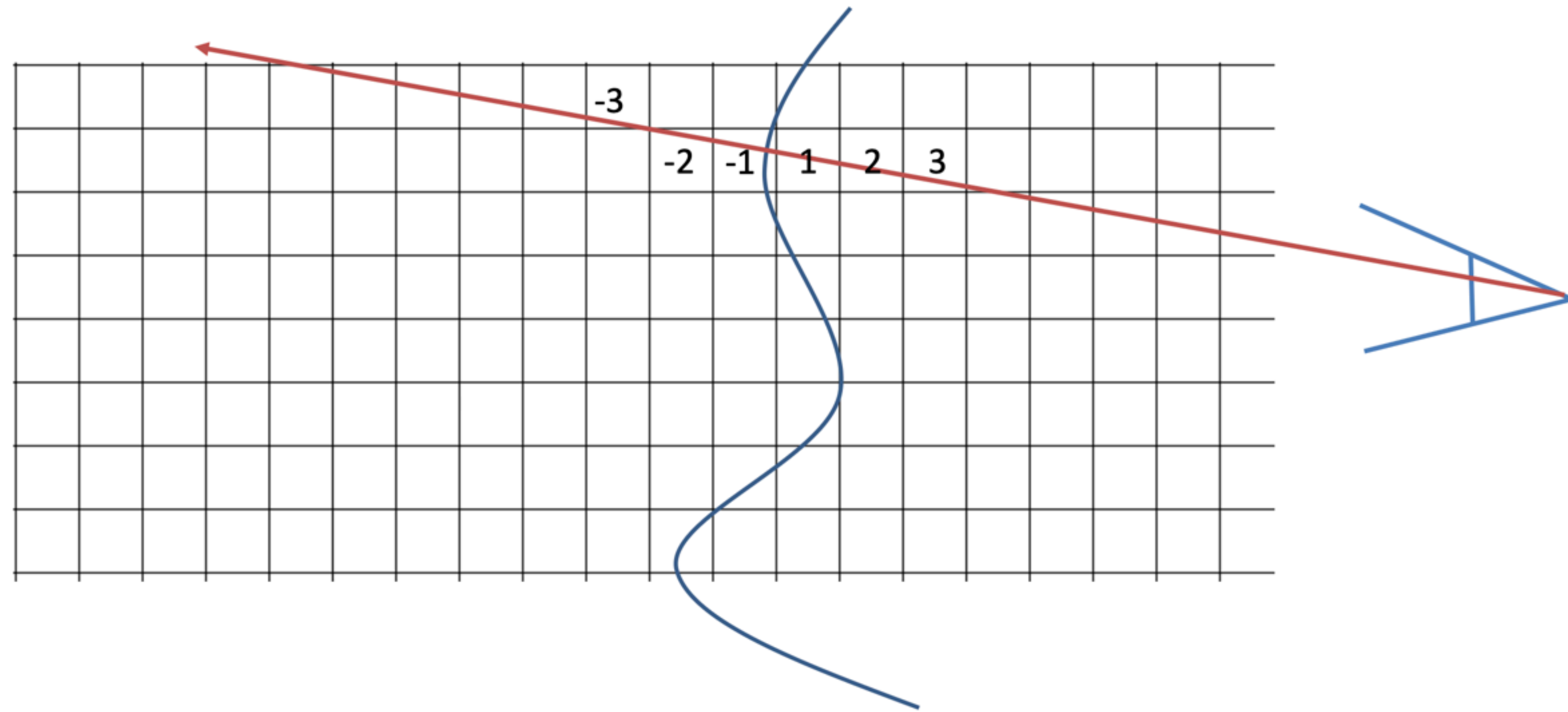
Mélység \Rightarrow Implicit felület



Mélységképek konverziója távolságmezővé?

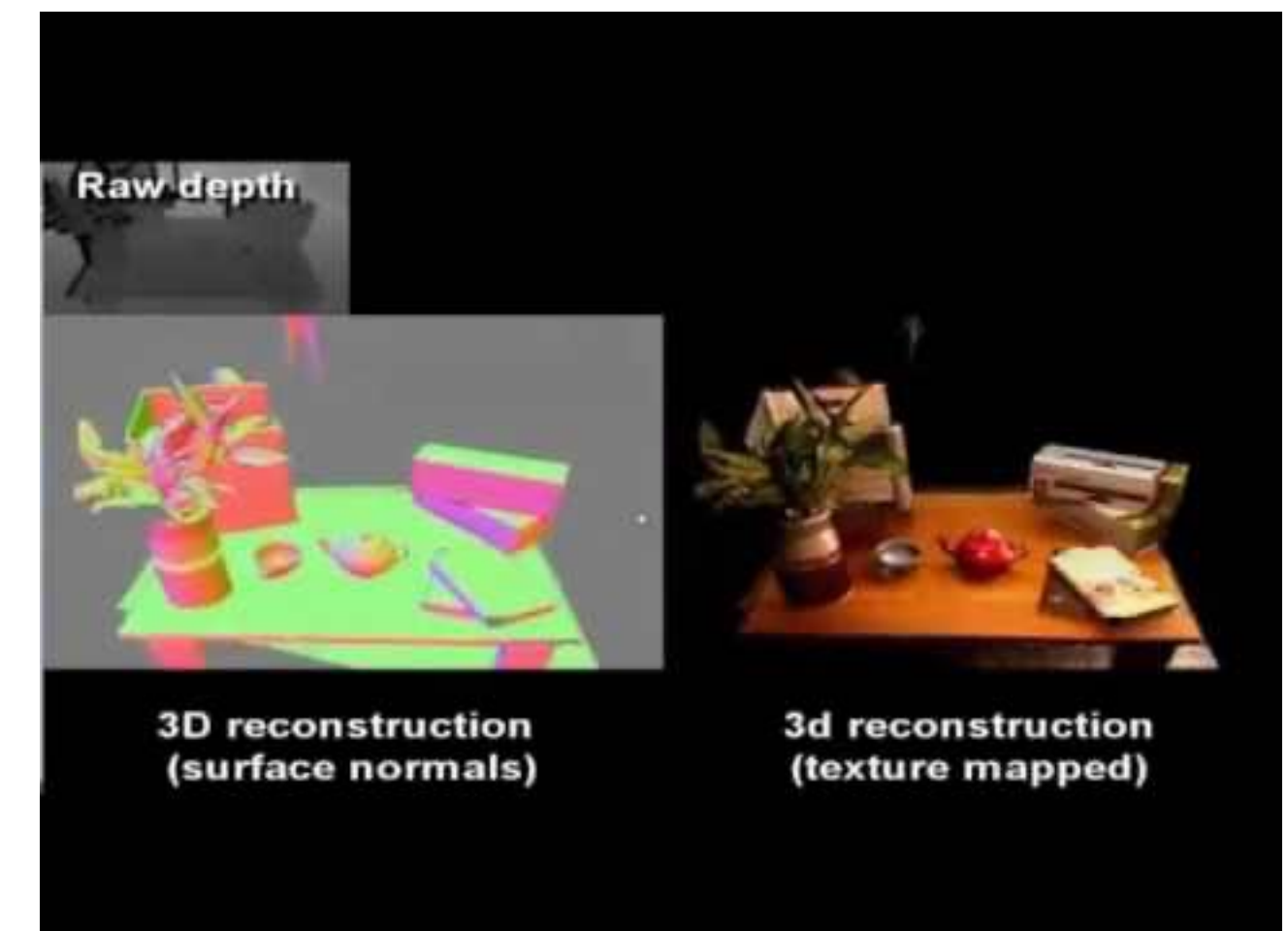
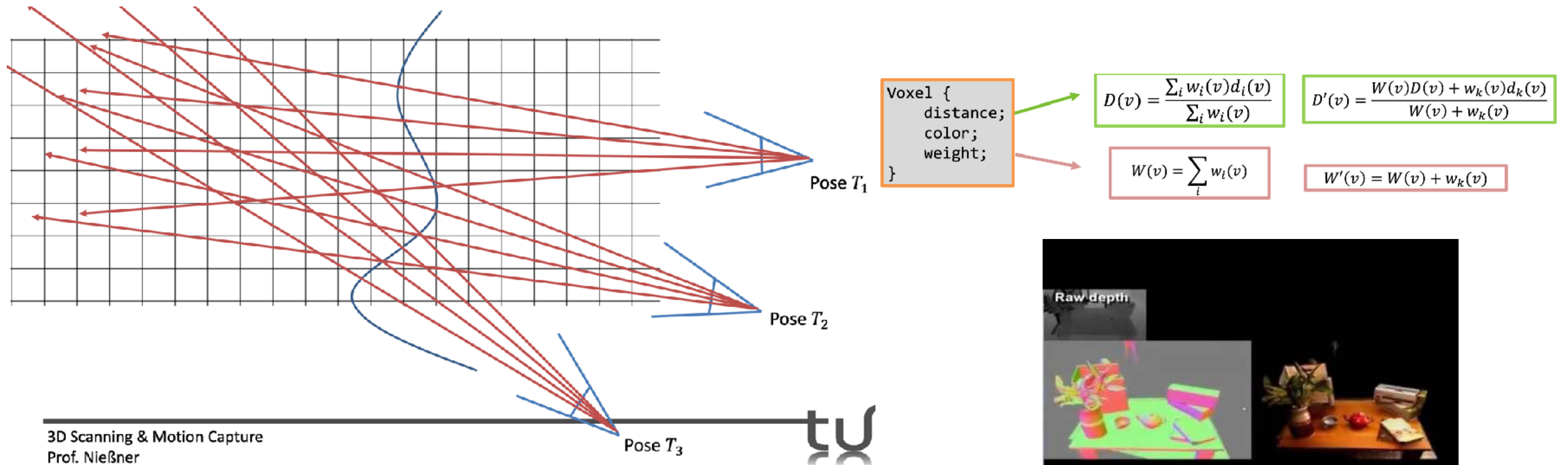
Konverzió Reprezentációk Között

Mélység \Rightarrow Implicit felület – Volumetrikus fúzió



Konverzió Reprezentációk Között

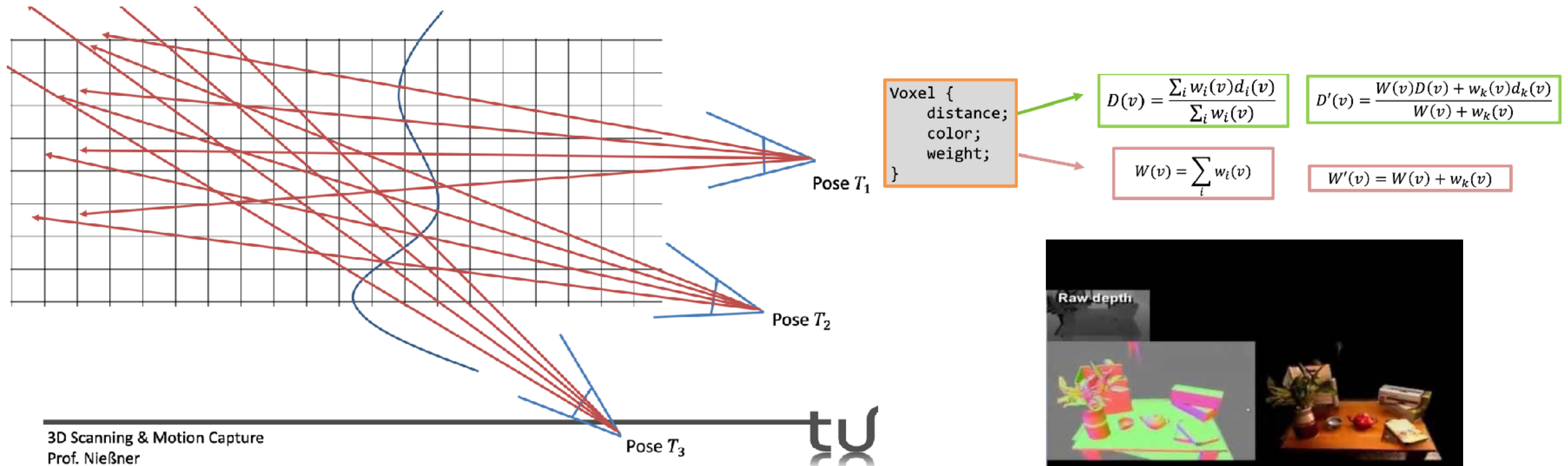
Mélység \Rightarrow Implicit felület – Volumetrikus fúzió



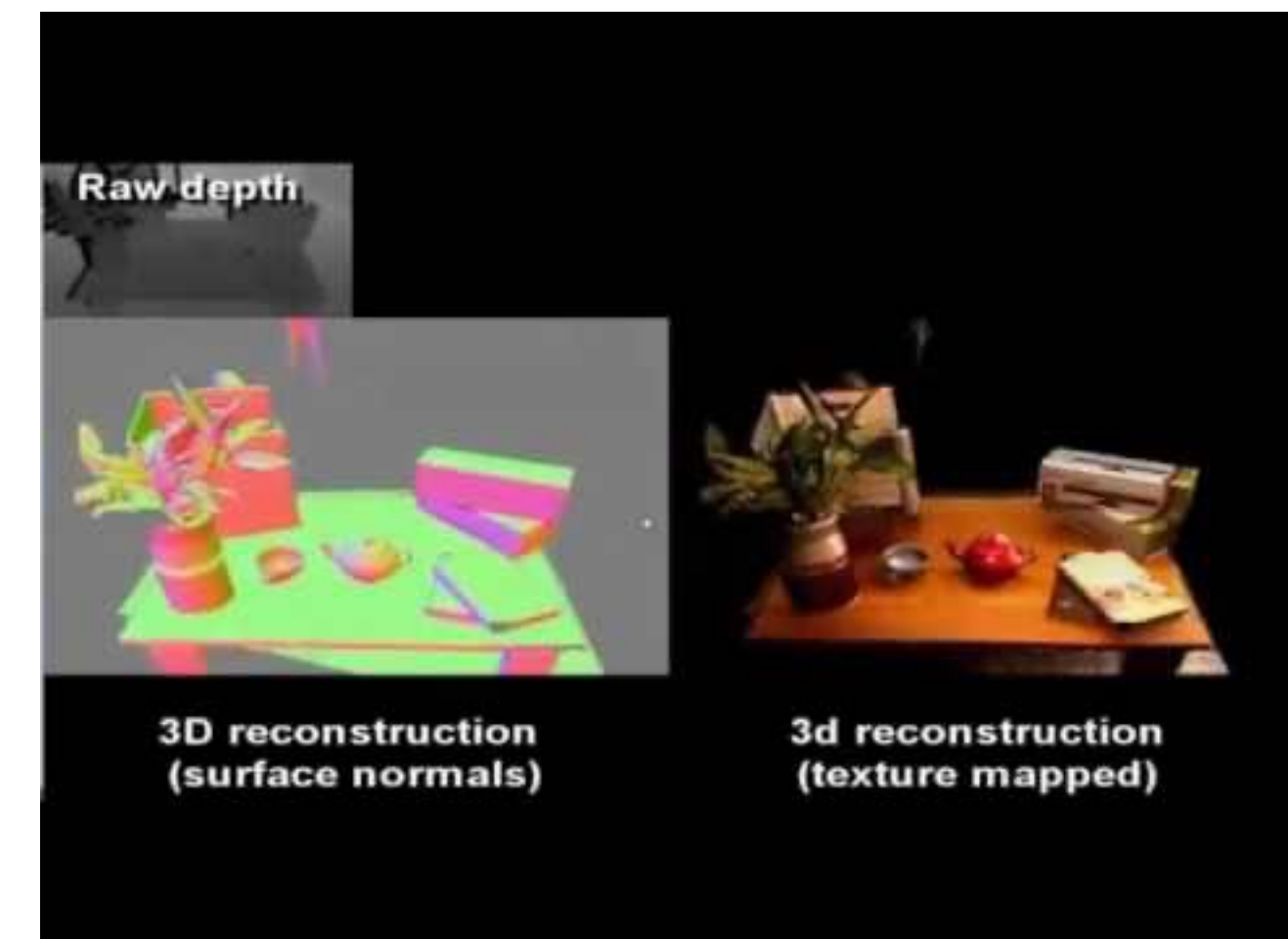
KinectFusion

Konverzió Reprezentációk Között

Mélység \Rightarrow Implicit felület – Volumetrikus fúzió



3D Scanning & Motion Capture
Prof. Nießner



KinectFusion

Következő előadás:

3D Mélytanulás

